LÓGICA I
CÁLCULO DE PROPOSICIONES

Francisco Hernández Quiroz

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
E-mail: fhq@ciencias.unam.mx
Página Web: www.matematicas.unam.mx/fhq

Posgrado en Filosofía de la Ciencia

Sintaxis del cálculo de proposiciones

Tenemos las proposiciones atómicas

$$P_A = \{p, q, r, p_0, \ldots\}$$

y las conectivas lógicas usuales:

$$\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow.$$

El conjunto de fórmulas se define inductivamente:

1. Las proposiciones atómicas son fórmulas.
2. Si α y β son fórmulas, también lo son

$$\neg\alpha \quad (\alpha \vee \beta) \quad (\alpha \wedge \beta) \quad (\alpha \Rightarrow \beta) \quad (\alpha \Leftrightarrow \beta).$$

3. Las únicas fórmulas son las que se pueden crear con un número finito de aplicaciones de las reglas anteriores.

Símbolos alternativos para conectivas

Conectiva	Estas notas	Otros textos
Negación	$\neg$	$\sim$
Conjunción	$\wedge$	&
Implicación	$\Rightarrow$	$\supset, \rightarrow$
Bicondicional	$\Leftrightarrow$	$\equiv, \leftrightarrow$

Semántica

- La semántica del cálculo de proposiciones se expresa en términos de valores de verdad (generalmente).
- Los valores de verdad más utilizados son los valores booleanos $\mathbb{B} = \{V, F\}$.
- Una evaluación es una función $e : P_A \rightarrow \mathbb{B}$.
- Esta función se puede extender a proposiciones compuestas cuando se combina con funciones booleanas asociadas a cada una de las conectivas.

Ejemplos

- Si tenemos la fórmula
$$p \wedge q$$
y
$$e(p) = V \qquad e(q) = V$$
esperamos que
$$e(p \wedge q) = V.$$
- Si
$$e(p) = V \qquad e(q) = F$$
entonces esperamos que
$$e(p \Leftrightarrow q) = F.$$

Las reglas precisas para evaluar fórmulas se definen a partir de las tablas de la siguiente lámina.

Funciones boolenas

Funciones de 0 argumentos
$$V^0 \text{ y } F^0.$$

Funciones de un argumento

	id / π_1^1	V^1	F^1	$\neg$
V	V	V	F	F
F	F	V	F	V

Funciones boolenas binarias

		π_1^2	π_2^2	V^2	F^2	$\wedge$	$\vee$	$\Rightarrow$	$\Leftrightarrow$	$\not\equiv$	$\downarrow$	$\uparrow$	$\Leftarrow$	$\neg\pi_2$	$\neg\pi_1$	$\not\Rightarrow$	$\not\Leftarrow$
V	V	V	V	V	F	V	V	V	V	F	F	F	V	F	F	F	F
V	F	V	F	V	F	F	V	F	F	V	F	V	V	V	F	V	F
F	V	F	V	V	F	F	V	V	F	V	F	V	F	F	V	F	V
F	F	F	F	V	F	F	F	V	V	F	V	V	V	V	V	F	F

π_1 es la proyección 1
V^2 es la constante verdadero
$\wedge$ es la conjunción
$\Rightarrow$ es la implicación
$\not\equiv$ es el o exclusivo
$\downarrow$ es la negación conjunta
$\neg\pi_2$ es la negación de π_2
$\not\Rightarrow$ es la no implicación material

π_2 es la proyección del 2
F^2 es la constante falso
$\vee$ es la disyunción
$\Leftrightarrow$ es doble implicación
$\uparrow$ es la negación alternativa
$\Leftarrow$ es la contraimplicación
$\neg\pi_1$ es la negación de π_1
$\not\Leftarrow$ es la no implicación conversa

Interdefinibilidad I

En otros cursos, seguramente se observó que pueden replicarse las tablas de verdad de un conectivo por medio de otros:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Es decir, *definimos* $\Rightarrow$ en términos de $\vee$ y $\neg$.
El siguiente teorema generaliza esta idea.

Interdefinibilidad II

Teorema 1.1

Todas las conectivas se pueden definir en términos de

1. $\neg$ *y una de las siguientes*
   1. $\vee$;
   2. $\wedge$;
   3. $\Rightarrow$;
2. $\uparrow$;
3. $\downarrow$.

Bastan las conectivas binarias para todo

- El teorema anterior parece referirse sólo a las conectivas binarias o unarias.
- Sin embargo, se aplica a las funciones boolenas de cualquier número de argumentos.
- Por ejemplo, la conectiva ternaria siguiente se puede definir en términos de dos binarias:

$$\text{if } p \text{ then } q \text{ else } r \equiv_{def} (p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow r)$$

- Y esto se puede generalizar a cualquier valor de n.

Demostración

- Por inducción en el número de argumentos de la función, con una salvedad:
- Los casos básicos son las constantes, las conectivas unarias y las binarias.
- La hipótesis inductiva es:
  Para toda $k < n$, toda función booleana $f : \{V, F\}^k \rightarrow \{V, F\}$ se puede definir con alguna de las opciones del teorema.
- Caso inductivo: toda función booleana $g : \{V, F\}^n \rightarrow \{V, F\}$ se puede definir con alguna de las opciones del teorema.
- *Sugerencia*: g se puede expresar como una combinación de una función

$$h : \{V, F\}^{n-1} \rightarrow \{V, F\}$$

  y una función

$$b : \{V, F\}^2 \rightarrow \{V, F\}.$$

Tautologías, contradicciones y contingencias I

- La mayoría de las proposiciones compuestas son *contingentes*: algunas asignaciones de valores de verdad a sus proposiciones atómicas producen V y otras F. Ejemplo:

$$(p \wedge q)$$

  pues si

$$e(p) = e(q) = V$$

  entonces

$$e((p \wedge q)) = V,$$

  en cambio, si

$$e(p) = V \quad e(q) = F$$

  entonces

$$e((p \wedge q)) = F.$$

Tautologías, contradicciones y contingencias II

- Algunas proposiciones siempre son verdaderas sin importar la asignación de valores a sus proposiciones atómicas. Ejemplo:

$$(p \vee \neg p),$$

  Estas proposiciones se conocen como *tautologías*. Se acostumbra distinguirlas anteponiendo el símbolo $\models$.
- Y otras siempre producen F. Ejemplo:

$$(p \wedge \neg p).$$

  Éstas se conocen como *contradicciones*.

Consecuencia lógica

El símbolo $\models$ también denota una relación entre conjuntos de proposiciones y fórmulas individuales:

$$\alpha_1, \ldots \alpha_n \models \beta.$$

Que se lee así

“β es consecuencia lógica de $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$”

Las proposiciones $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ se conocen como las *premisas*; y β, como la conclusión.
La expresión completa se conoce como *argumento*.

Argumentos válidos e inválidos

Definición 1.2

Un argumento

$$\alpha_1, \ldots \alpha_n \models \beta.$$

es válido sii para toda evaluación

$$e : P_A \to \{V, F\}$$

se tiene que si

$$e(\alpha_1) = V \ldots e(\alpha_n) = V,$$

entonces

$$e(\beta) = V.$$

En caso contrario, se dice que el argumento es inválido.

Formas normales I

- Llamaremos *literal* a una fórmula si es una proposición atómica o la negación de una proposición atómica.
- Una fórmula está en *forma normal conjuntiva* (o CNF, para abreviar) si tiene la siguiente forma

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{m} \alpha_{i,j} \right),$$

  donde $\alpha_{i,j}$ es una literal.
- Una fórmula está en *forma normal disyuntiva* (o DNF, para abreviar) si tiene la siguiente forma

$$\bigvee_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{j=1}^{m} \alpha_{i,j} \right).$$

Formas normales II

- Las fórmulas

$$(p \vee q) \wedge (r \vee \neg p) \qquad (p \wedge q) \vee (r \wedge \neg p)$$

están en CNF y DNF, respectivamente.
- Cada una de las disyunciones que componen una fórmula en CNF es una cláusula (análogamente para las conjunciones en DNF).
- Si el número de literales que aparece en una cláusula es menor o igual a n, diremos que la fórmula está en nCNF (análogamente, en nDNF).
- Las fórmulas del ejemplo anterior están en 2CNF y 2DNF, respectivamente.

Conversión de fórmulas a CNF y DNF

- Toda fórmula α tiene fórmulas equivalente en CNF y DNF. Por ejemplo, $p \Rightarrow p$ es equivalente a la fórmula $\neg p \vee p$ (que está en 2CNF o 1DNF).
- Para transformar una fórmula arbitraria a CNF se pueden utilizar las equivalencias siguientes de manera sucesiva

$$(\alpha \Rightarrow \beta) \Leftrightarrow (\neg\alpha \vee \beta) \qquad (\alpha \Leftrightarrow \beta) \Leftrightarrow (\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \neg\beta)$$

$$\neg\neg\alpha \Leftrightarrow \alpha \qquad \neg(\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow \neg\alpha \wedge \neg\beta \qquad \neg(\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow \neg\alpha \vee \neg\beta$$

$$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \Leftrightarrow (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma).$$

- Y, desde luego, la conmutatividad de $\vee$ y $\wedge$.

Sistemas de demostración

- Los *sistemas de demostración* son herramientas para verificar la validez de argumentos lógicos por medios estrictamente *sintácticos*.
- Un sistema de demostración está formado por un conjunto (generalmente finito) de *reglas de inferencia* e instrucciones sobre cómo aplicar estas reglas.
- El concepto de *demostración* es el núcleo de un sistema: una demostración es un conjunto de fórmulas que permiten ir de las premisas a la conclusión por medio de transformaciones sintácticas.
- Para que un sistema de demostración sea útil debe cumplir un conjunto de propiedades *metateóricas*: corrección, completitud, etc.

Reglas de inferencia

Sean $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ y β fórmulas del cálculo de proposiciones. Una *regla de inferencia* tiene la siguiente forma

$$R \quad \frac{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}{\beta}$$

donde

- $0 \leq n$;
- $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son las *premisas*;
- β es la conclusión;
- R es el nombre de la regla.

Si $n = 0$, el conjunto de premisas es vacío y este tipo de reglas se conoce como *axioma*.

Ejemplo: Sistema de Łukasiewicz

Axiomas de Łukasiewicz:

$$\begin{array}{ll} A_1 & p \Rightarrow (q \Rightarrow p) \\ A_2 & (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)) \\ A_3 & (\neg p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow (q \Rightarrow p) \end{array}$$

Se tiene una sola regla de derivación: *modus ponens*

$$MP \quad \frac{p \Rightarrow q \qquad p}{q}$$

Demostraciones I

Sean $\eta_1, ..., \eta_m$ y θ fórmulas y sea S un sistema de demostración. Diremos que θ se infiere de $\eta_1, ..., \eta_m$ en S sii existe una sucesión finita de fórmulas $\langle \gamma_1, \ldots \gamma_k \rangle$ tal que

- $\gamma_k = \theta$;
- para todo $i \leq k$ se tiene uno de los siguientes casos:
  1. existe $j \leq n$ tal que $\gamma_i = \eta_j$;
  2. existen
     - una regla de inferencia $\quad \dfrac{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}{\beta}$
     - una sustitución de fórmulas atómicas por fórmulas

       $$\sigma = [p_1 := \psi_1; \ldots, p_r := \psi_r]$$
     - y fórmulas

       $$\gamma_{i_1}, \ldots, \gamma i_n \qquad (\text{con } i_1, \ldots, i_n < i)$$

Demostraciones II

tales que

$$\begin{array}{rcl} \gamma_{i_1} & = & \alpha_1 \sigma \\ \ldots & & \\ \gamma_{i_n} & = & \alpha_n \sigma \\ \gamma_i & = & \beta \sigma \end{array}$$

En ese caso diremos que

$$\eta_1, \ldots, \eta_m \vdash_S \theta$$

es un teorema de S.

Ejemplo

Aquí tenemos un ejemplo de una demostración: $p, q \Rightarrow (p \Rightarrow r) \vdash_L q \Rightarrow r$:

1	p	premisa
2	$q \Rightarrow (p \Rightarrow r)$	premisa
3	$p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$	A_1
4	$q \Rightarrow p$	MP 1, 3
5	$(q \Rightarrow (p \Rightarrow r)) \Rightarrow ((q \Rightarrow p) \Rightarrow (q \Rightarrow r))$	A_2
6	$(q \Rightarrow p) \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	MP 2, 5
7	$q \Rightarrow r$	MP 4, 6

Deducción natural

- La deducción natural es un sistema con un conjunto grande de reglas de inferencia.
- La deducción natural tiene reglas para introducir (señaladas con I) o eliminar (E) las conectivas lógicas.
- Además, hay tres reglas adicionales: contradicción (C), sustitución (S) y falso (F).
- Algunas reglas introducen *hipótesis* adicionales. Las inferencias que se hagan con estas hipótesis aparecen dentro de cajas. Las cajas se cierran extrayendo una conclusión de acuerdo con las condiciones de cada regla.
- El símbolo $\top$ denota una fórmula siempre verdadera; $\bot$, una siempre falsa.

Reglas de deducción natural I

$$I\wedge \quad \frac{p \quad q}{p \wedge q} \qquad\qquad E\wedge \quad \frac{p \wedge q}{p} \quad \frac{p \wedge q}{q}$$

$$I\vee \quad \frac{p}{p \vee q} \quad \frac{q}{p \vee q} \qquad\qquad E\vee \quad \frac{p \vee q \quad \boxed{\begin{array}{c} p \\ \vdots \\ r \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c} q \\ \vdots \\ r \end{array}}}{r}$$

$$I\Rightarrow \quad \frac{\boxed{\begin{array}{c} p \\ \vdots \\ q \end{array}}}{p \Rightarrow q} \qquad\qquad E\Rightarrow \quad \frac{p \Rightarrow q \quad p}{q}$$

Reglas de deducción natural II

$$I\Leftrightarrow \quad \frac{p \Rightarrow q \quad q \Rightarrow p}{p \Leftrightarrow q} \qquad\qquad E\Leftrightarrow \quad \frac{p \Leftrightarrow q}{p \Rightarrow q} \quad \frac{p \Leftrightarrow q}{q \Rightarrow p}$$

$$I\neg \quad \frac{\boxed{\begin{array}{c} p \\ \vdots \\ \bot \end{array}}}{\neg p} \qquad\qquad E\neg \quad \frac{\boxed{\begin{array}{c} \neg p \\ \vdots \\ \bot \end{array}}}{p}$$

$$I\bot \quad \frac{p \quad \neg p}{\bot} \qquad\qquad E\bot \quad \frac{\bot}{p}$$

$$S \quad \frac{\alpha \Leftrightarrow \beta \quad \gamma_{[p:=\alpha]}}{\gamma_{[p:=\beta]}}$$

Nota. Los nombres de las reglas varían según los libros de texto. La regla $E\neg$ se conoce también como C, de *contradicción*.

Ejemplo 1

Demostraremos algunos teoremas en $\vdash_N$.
Primero $p \Rightarrow q, q \Rightarrow r \vdash_N p \Rightarrow r$.

1	$p \Rightarrow q$	*Premisa*
2	$q \Rightarrow r$	*Premisa*
3	p	*Hipótesis*
4	q	$E\Rightarrow$ 1, 3
5	r	$E\Rightarrow$ 2, 4
6	$p \Rightarrow r$	$I\Rightarrow$

Ejemplo 2

Ahora, un ejemplo de $E\vee$, $I\bot$ y $E\bot$: $p \vee q, \neg p \vdash_N q$

1	$p \vee q$				*Premisa*
2	$\neg p$				*Premisa*
3	p	*Hip.*	6	q	*Hip.*
4	$\bot$	$I\bot$ 3, 2			
5	q	$E\bot$ 4			
7	q				$E\vee$ 1

Ejemplo 3. Demostraremos $\vdash_N p \Leftrightarrow \neg\neg p$ TDN

1	p	*Hipótesis*
2	$\neg p$	*Hipótesis*
3	$\bot$	$I\bot$ 1, 2
4	$\neg\neg p$	$I\neg$ 2
5	$p \Rightarrow \neg\neg p$	$I\Rightarrow$
6	$\neg\neg p$	*Hipótesis*
7	$\neg p$	*Hipótesis*
8	$\bot$	$I\bot$ 7, 6
9	p	$E\neg$ 7
10	$\neg\neg p \Rightarrow p$	$I\Rightarrow$
11	$p \Leftrightarrow \neg\neg p$	$I\Leftrightarrow$ 5, 10

Ejemplo 4. $p \Rightarrow q, \neg q \vdash_N \neg p$ MT

1	$p \Rightarrow q$	*Premisa*
2	$\neg q$	*Premisa*
3	p	*Hipótesis*
4	q	$E\Rightarrow$ 1, 3
5	$\bot$	$I\bot$ 4, 2
6	$\neg p$	$I\neg$ 3

Ejemplo 5. $(p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow q$

1	$(p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow q)$	*Hipótesis*
2	$p \Rightarrow q$	$E\wedge$ 1
3	$\neg p \Rightarrow q$	$E\wedge$ 1
4	$\neg q$	*Hipótesis*
5	$\neg p$	MT 2, 4
6	$\neg\neg p$	MT 3, 4
7	$\bot$	$I\bot$ 5, 6
8	q	$E\neg$ 4
9	$(p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow q$	$I\Rightarrow$

Ejemplo 6. $(p \wedge q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$ Parte I

1	$p \wedge q \Rightarrow r$	*Hipótesis*
2	p	*Hipótesis*
3	q	*Hipótesis*
4	$p \wedge q$	$I\wedge$ 2, 3
5	r	$E\Rightarrow$ 1, 4
6	$q \Rightarrow r$	$I\Rightarrow$
7	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	$I\Rightarrow$
8	$(p \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$	$I\Rightarrow$

Ejemplo 6. $(p \wedge q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$ Parte II

9	$(p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$	*Hipótesis*
10	$p \wedge q$	*Hipótesis*
11	p	$E\wedge$ 10
12	q	$E\wedge$ 10
13	$q \Rightarrow r$	$E\Rightarrow$ 9, 11
14	r	$E\Rightarrow$ 13, 12
15	$p \wedge q \Rightarrow r$	$I\Rightarrow$
16	$(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \wedge q \Rightarrow r)$	$I\Rightarrow$
17	$(p \wedge q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$	$I\Leftrightarrow$ 8, 16

Ejemplo 7. $\vdash_N \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ (parte I)

1	$\neg(p \wedge q)$	*Hipótesis*
2	$\neg(\neg p \vee \neg q)$	*Hipótesis*
3	$\neg p$	*Hipótesis*
4	$\neg p \vee \neg q$	$I\vee$ 3
5	$\perp$	$I\perp$ 4, 2
6	$\neg\neg p$	$I\neg$ 3
7	$\neg q$	*Hipótesis*
8	$\neg p \vee \neg q$	$I\vee$ 7
9	$\perp$	$I\perp$ 8, 2
10	$\neg\neg q$	$I\neg$ 7
11	$p \wedge q$	$I\wedge$ 6, 10, TDN 6, 10
12	$\perp$	$I\perp$ 11, 1

Ejemplo 7. $\vdash_N \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ (parte II)

13	$\neg p \vee \neg q$	$E\neg$ 2
14	$\neg(p \wedge q) \Rightarrow \neg p \vee \neg q$	$I\Rightarrow$
15	$\neg p \vee \neg q$	*Hipótesis*
16	$p \wedge q$	*Hipótesis*
17	p	$E\wedge$ 16
18	q	$E\wedge$ 16
19	$\neg p$	*Hip.*
20	$\perp$	$I\perp$ 17, 19
21	$\neg q$	*Hip.*
22	$\perp$	$I\perp$ 18, 21
23	$\perp$	$E\vee$ 15
24	$\neg(p \wedge q)$	$I\neg$ 16
25	$\neg p \vee \neg q \Rightarrow \neg(p \wedge q)$	$I\Rightarrow$
26	$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$	$I\Leftrightarrow$ 14, 25

Propiedades de los sistemas de demostración

Definición 1.3

Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ y β fórmulas. Un sistema de demostración $\vdash$ es:

- *correcto sii $\vdash \beta$ implica que $\vDash \beta$;*
- *correcto en sentido amplio sii*
$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vdash \beta \text{ implica } \alpha_1, \ldots, \alpha_n \vDash \beta;$$
- *completo sii $\vDash \beta$ implica que $\vdash \beta$;*
- *completo en sentido amplio sii*
$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vDash \beta \text{ implica } \alpha_1, \ldots, \alpha_n \vdash \beta;$$
- *consistente sii no existe una fórmula γ tal que $\vdash \gamma$ y $\vdash \neg\gamma$;*
- *decidible sii existe un “procedimiento efectivo” para determinar, dada una fórmula arbitraria γ, si $\vdash \gamma$ o $\nvdash \gamma$.*

Corrección de $\vdash_N$

¿Cuáles de estas propiedades se cumplen en $\vdash_N$? Veremos que todas. Por ahora demostraremos que cumple con corrección (en sentido amplio):

Teorema 1.4

Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ y β fórmulas. Entonces
$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vdash_N \beta \quad \text{implica que} \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_n \vDash \beta.$$

- Obsérvese que la propiedad más débil de corrección a secas es implicada por corrección en sentido amplio.
- Sin embargo, existen sistemas de demostración que cumplen con corrección, pero no con corrección en sentido amplio.
- En pocas palabras: corrección y corrección en sentido amplio ***no*** son equivalentes.

Inducción en demostraciones I

- Un método que nos será útil en las próximas láminas es la *inducción en demostraciones*.
- Con esto método podemos demostrar que una propiedad es cierta de todos los pasos de una demostración.
- La típica demostración se ve así:

$$\begin{array}{ccl} 1 & \gamma_1 & \text{Justificación} \\ \vdots & \vdots & \\ m & \gamma_m & \text{Justificación} \end{array}$$

- El método consta de los siguientes pasos:
  1. En primer lugar, demostramos que la propiedad es cierta de todas las fórmulas γ_i tales que γ_i es una premisa (en caso de que las haya).
  2. Después asumimos una *hipótesis inductiva*:

Inducción en demostraciones II

para toda $j < m$, la propiedad es cierta de γ_j.

3. A partir de este hecho, demostramos que la propiedad también se cumple en γ_m.

- Ocuparemos este método para demostrar que $\vdash_N$ es correcto.

Demostración de corrección I

$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vdash_N \beta$ significa que tenemos una demostración

$$\begin{array}{ll} 1 & \gamma_1 \\ \vdots & \vdots \\ k & \gamma_k \end{array}$$

donde $\gamma_k = \beta$.
Obsérvese que la definición de demostración implica también que

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vdash_N \gamma_i \quad \text{para toda } i \leq k.$$

Aprovechando esto, demostraremos un resultado más fuerte, a saber:

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vDash \gamma_i \quad \text{para toda } i \leq k.$$

Demostración de corrección II

La demostración será por inducción en demostraciones: dada una i arbitraria, supondremos que para todo $j < i$ se cumple la hipótesis inductiva siguiente:

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vDash \gamma_j.$$

Sea entonces $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vdash_N \gamma_i$. La definición de demostración nos dice que existen dos casos:
Caso simple: $\exists m \leq n.\, \alpha_m = \gamma_i$, es decir, γ_i es una premisa. Este caso es trivial pues por definición de $\vDash$

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vDash \alpha_m.$$

Caso inferencial: Existe una regla de derivación y fórmulas $\gamma_{j_1}, \ldots, \gamma_{j_m}$ (con $j_1, \ldots, j_m < i$) tales que las premisas de la regla corresponden a estas fórmulas y la conclusión corresponde a γ_i (bajo una sustitución adecuada).

Demostración de corrección III

Este caso se subdivide a su vez en múltiples subcasos, uno por cada regla de $\vdash_N$. Se presentarán sólo algunos ejemplos.
Caso $I \wedge$. Entonces la demostración se ve así:

$$\begin{array}{lll} 1 & \gamma_1 & \\ \vdots & \vdots & \\ j & \gamma_j & \\ \vdots & \vdots & \\ m & \gamma_m & \\ \vdots & \vdots & \\ i & \gamma_j \wedge \gamma_m & I \wedge \text{ en } j \text{ y } m \end{array}$$

es decir, $\gamma_i = \gamma_j \wedge \gamma_m$. Por hipótesis inductiva

$$\begin{array}{ll} \alpha_1, \ldots, \alpha_n & \vDash \gamma_j \\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n & \vDash \gamma_m \end{array}$$

Demostración de corrección IV

y por la tabla de verdad de la $\wedge$ y la definición de $\vDash$

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vDash \gamma_j \wedge \gamma_m = \gamma_i$$

Caso $I \Rightarrow$. La demostración se ve así:

$$\begin{array}{lll} 1 & \gamma_1 & \\ \vdots & \vdots & \\ j & \gamma_j & \textit{Hip.} \\ \vdots & \vdots & \\ i-1 & \gamma_{i-1} & \\ i & \gamma_j \Rightarrow \gamma_{i-1} & \end{array}$$

es decir, $\gamma_i = \gamma_j \Rightarrow \gamma_{i-1}$.

Demostración de corrección V

Este caso difiere del anterior por el uso de una hipótesis. Se puede ver la hipótesis como una premisa adicional y entonces se tiene

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \gamma_j \vdash_N \gamma_{i-1}.$$

Por hipótesis inductiva

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \gamma_j \vDash \gamma_{i-1}.$$

Ahora bien, la única forma de que el resultado deseado

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vDash \gamma_j \Rightarrow \gamma_{i-1}$$

no valiera, sería si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ fueran verdaderas pero $\gamma_j \Rightarrow \gamma_{i-1}$ fuera falsa (por la definición de $\vDash$).

Demostración de corrección VI

Esto último sólo sería posible si γ_j fuera verdadera y γ_{i-1} fuera falsa (por la tabla de verdad de la $\Rightarrow$), lo cual no es compatible con la hipótesis inductiva, por lo que el resultado vale.

La demostración continúa con los casos correspondientes a las demás reglas (como ejercicios para el lector). □

Completitud de $\vdash_N$

Para demostrar la completitud amplia de $\vdash_N$ se seguirá esta ruta:

1. Se demostrarán varios lemas, entre ellos una versión del teorema de deducción común a otros sistemas de demostración.
2. Se demostrará la completitud simple de $\vdash_N$.
3. La completitud en sentido amplio se obtendrá como un corolario de la completitud simple.

Teoremas de la deducción

Teorema 1.5

Teorema de la deducción (versión semántica). $\alpha \vDash \beta$ *sii* $\vDash \alpha \Rightarrow \beta$.

Demostración. Se sigue directamente de la definición de $\vDash$ y la tabla de verdad de la $\Rightarrow$. □

Teorema 1.6

Teorema de la deducción (versión sintáctica). $\alpha \vdash_N \beta$ *sii* $\vdash_N \alpha \Rightarrow \beta$.

Demostración. Dada una demostración de $\alpha \vdash_N \beta$, se demuestra $\vdash_N \alpha \Rightarrow \beta$ transformando α de premisa en hipótesis y aplicando la regla de $I \Rightarrow$.
A la inversa, dada una demostración de $\vdash_N \alpha \Rightarrow \beta$ y con α como una premisa adicional, la regla $E \Rightarrow$ nos da una demostración de $\alpha \vdash_N \beta$. □

Lema para completitud I

Lema 1.7

Sea α una fórmula y sean $p_1, \ldots, p_n$ las variables proposicionales que aparecen en α. Sea $e : P_0 \to \mathbb{B}$ una evaluación y constrúyanse las fórmulas $p_1', \ldots, p_n', \alpha'$ definidas de la siguiente forma:

$$p_i' = \begin{cases} p_i & \text{si } e(p_i) = V \\ \neg p_i & \text{si } e(p_i) = F \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \alpha' = \begin{cases} \alpha & \text{si } e(\alpha) = V \\ \neg\alpha & \text{si } e(\alpha) = F \end{cases}$$

Entonces $p_1', \ldots, p_n' \vdash_N \alpha'$.

Demostración. Por inducción sobre la estructura de α.
Caso básico: $\alpha = p$. Si $e(p) = V$, entonces $p' = p = \alpha = \alpha'$. Entonces tenemos el teorema trivial $p \vdash_N p$.

Lema para completitud II

Si $e(p) = F$, entonces $p' = \neg p = \neg\alpha = \alpha'$. De nuevo, trivialmente $\neg p \vdash_N \neg p$.
Los casos inductivos se pueden reducir a dos: $\alpha = \neg\beta$ y $\alpha = \beta \vee \gamma$ gracias a que las demás conectivas se pueden definir en función de $\neg$ y $\vee$.

Caso $\alpha = \neg\beta$. Sean $p_1, \ldots, p_m$ las proposiciones atómicas que forman β (obsérvese que son las mismas de α) y sea e una evaluación. En este caso, la hipótesis inductiva nos dice que

$$p_1', \ldots, p_m' \vdash_N \beta'.$$

Y se tienen dos subcasos: $\beta' = \beta$ y $\beta' = \neg\beta$ (dependiendo de si $e(\beta) = V$ o $e(\beta) = F$, respectivamente).

Lema para completitud III

En el primer subcaso, $\alpha' = \neg\alpha = \neg\neg\beta$. Utilizando el teorema $\vdash_N p \Leftrightarrow \neg\neg p$ y la hipótesis inductiva, obtenemos

$$p_1', \ldots, p_m' \vdash_N \neg\neg\beta = \alpha'.$$

En el segundo subcaso, $\alpha' = \alpha = \beta'$ y el resultado se sigue directamente de la hipótesis inductiva.

Caso $\alpha = \beta \vee \gamma$. Sean $p_1, \ldots, p_m$ y $q_1, \ldots, q_r$ las proposiciones atómicas de β y γ, respectivamente. Sea e una evaluación. Entonces la hipótesis inductiva nos da

$$p_1', \ldots, p_m' \vdash_N \beta' \qquad \text{y} \qquad q_1', \ldots, q_r' \vdash_N \gamma'.$$

(Obsérvese que no importa si β y γ comparten proposiciones atómicas: e es una evaluación común y reciben el mismo valor de verdad).

Lema para completitud IV

Nuevamente, hay dos subcasos: $e(\alpha) = F$ y $e(\alpha) = V$.
El primer subcaso implica que $e(\beta) = e(\gamma) = F$ (por la tabla de verdad de $\vee$). En este caso,

$$\beta' = \neg\beta \qquad \gamma' = \neg\gamma \qquad \alpha' = \neg\alpha = \neg(\beta \vee \gamma).$$

La hipótesis inductiva ahora se ve así:

$$p_1', \ldots, p_m' \vdash_N \neg\beta \qquad \text{y} \qquad q_1', \ldots, q_r' \vdash_N \neg\gamma.$$

Aplicando la regla $I\wedge$ y el teorema de De Morgan

$$\vdash_N \neg p \wedge \neg q \Leftrightarrow \neg(p \vee q)$$

se puede concluir

$$p_1', \ldots, p_m', q_1', \ldots, q_r' \vdash_N \neg(\beta \vee \gamma) = \alpha'.$$

Lema para completitud V

En el segundo subcaso, $\alpha' = \alpha = \beta \vee \gamma$, lo que implica (por la tabla de verdad de la $\vee$) que $\beta' = \beta$ o $\gamma' = \gamma$ o ambas cosas. En cualquiera de los tres casos, la regla de $I\vee$ nos lleva a la conclusión deseada:

$$p_1', \ldots, p_m', q_1', \ldots, q_r' \vdash_N \beta \vee \gamma = \alpha' . \quad \square$$

Completitud de $\vdash_N$ I

Teorema 1.8

Si $\vDash \alpha$, entonces $\vdash_N \alpha$.

Demostración. Sea $\vDash \alpha$ y sean $p_1, \ldots p_m$ las proposiciones atómicas que aparecen en α. Sea e una evaluación. Por el lema anterior

$$p_1', \ldots p_m' \vdash_N \alpha' .$$

Dado que α es una tautología, $\alpha' = \alpha$, sin importar qué asignaciones haga e.
Sea $e(p_1) = V$, por lo que $p_1' = p_1$. Sea e_1 una evaluación igual a e, salvo que $e_1(p_1) = F$ y, en este caso, $p_1' = \neg p_1$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} p_1, \ldots p_m' &\vdash_N \alpha \\ \neg p_1, \ldots p_m' &\vdash_N \alpha. \end{aligned}$$

Completitud de $\vdash_N$ II

Aplicando el teorema de la deducción en cada caso, tenemos

$$\begin{aligned} p_2', \ldots p_m' &\vdash_N p_1 \Rightarrow \alpha \\ p_2', \ldots p_m' &\vdash_N \neg p_1 \Rightarrow \alpha. \end{aligned}$$

Con el teorema $\vdash_N (p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow q$ y aplicaciones de las reglas $I\wedge$ y $E\Rightarrow$ se obtiene

$$p_2', \ldots p_m' \vdash_N \alpha.$$

Repitiendo este proceso $m - 1$ veces se llegará a $\vdash_N \alpha$. $\square$

Corolario de completitud en sentido amplio

Corolario 1.9

Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vDash \beta$ entonces $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vdash_N \beta$.

Demostración. Obsérvese que si

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vDash \beta,$$

el teorema de la deducción (semántico), nos da

$$\vDash \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \Rightarrow \beta.$$

Completitud simple a su vez nos da

$$\vdash_N \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \Rightarrow \beta.$$

Y gracias al teorema de la deducción sintáctico

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vdash_N \beta . \quad \square$$

Consistencia y decidibilidad

Teorema 1.10

$\vdash_N$ es consistente, es decir, no existe α tal que $\vdash_N \alpha$ y $\vdash_N \neg\alpha$.

Demostración. Si existiera una α así, podríamos obtener con una aplicación de $I\wedge$ el teorema $\vdash_N \alpha \wedge \neg\alpha$, el cual debería ser una tautología, dado que $\vdash_N$ es correcto. Como esto es imposible, no puede existir esa α. □

Teorema 1.11

$\vdash_N$ es decidible, es decir, existe un procedimiento efectivo tal que para toda α, nos responde si $\vdash_N \alpha$.

Demostración. Si $\vdash_N \alpha$ fuera un teorema, por corrección tendríamos que $\models \alpha$. Esto último se puede verificar por medio de una tabla de verdad, cuya construcción es un procedimiento efectivo. □