

# LÓGICA 1 PRESENTACIÓN

Francisco Hernández Quiroz

Departamento de Matemáticas  
Facultad de Ciencias, UNAM  
E-mail: fhq@ciencias.unam.mx  
Página Web: www.matematicas.unam.mx/fhq

Posgrado en Filosofía de la Ciencia

## Índice

- 1 ¿Qué es la lógica?: una respuesta provisional
- 2 Para qué sirve...cuando sirve
- 3 Breve historia de la lógica
- 4 El zoo-lógico
- 5 Propiedades y limitaciones

## ¿Qué es la lógica? Una respuesta provisional

La lógica se ocupa de argumentos: una serie de premisas de la que se sigue una conclusión.

Premisas:

- 1 Todos los hombres son mortales.
- 2 Sócrates es un hombre.

Conclusión:

- 3 Sócrates es mortal.

## Forma vs contenido

Para la lógica, la verdad de un argumento no tiene que ver con su contenido, sino con su forma:

Premisas:

- 1 Todos los bologovos son misófilos.
- 2 El Jabberwock es un bologovo.

Conclusión:

- 3 El Jabberwock es un misófilo.

## Sintaxis y semántica

Un lenguaje lógico consta de:

- *Sintaxis*. Son reglas que dicen qué cadenas de símbolos pertenecen al lenguaje.  
Por ejemplo,  $p \Rightarrow q$  es una fórmula del cálculo de proposiciones, pero  $\Rightarrow p$  no lo es.
- *Semántica*. Son reglas que relacionan las fórmulas con un universo de significado. Por ejemplo, si
 

$p$	significa	“México perdió con Brasil”	y	
$q$	significa	“México le ganó a Croacia”,	entonces	
$\neg p \wedge q$	significa	“México no perdió con Brasil y le ganó a Croacia”		

## Sistemas de demostración

Un tercer elemento de un sistema lógico son las

- *Reglas de derivación*. Son reglas que nos permiten derivar una fórmula a partir de otras. Ejemplo: *modus ponens*

$$\frac{p \Rightarrow q, p}{q}$$

que nos permite concluir  $q$  a partir de  $p \Rightarrow q$  y  $p$ .

## En conclusión...por ahora

La lógica es un lenguaje formal con

- Sintaxis
- Semántica
- Y (frecuentemente) un sistema de demostración asociado
- Además tiene alguna noción de consecuencia lógica/derivabilidad/verificación
- También es el estudio de estas nociones en abstracto

## Para qué sirve ...cuando sirve

Una persona espera el elevador y, antes de que pueda oprimir el botón de llamada, se abre la puerta y nota que el profesor de Lógica está adentro.

Para saber si el elevador va en la dirección deseada, la persona que esperaba afuera pregunta al profesor:

—¿Sube o baja?

—Sí—responde el profesor.

## Lógica en la filosofía de la ciencia

- Lógica para fundamentos de la matemática
- Lógica para fundamentos de la ciencia (positivismo lógico)
- lógica para entender cómo funciona la ciencia

## Lógica vs racionalidad

“No, no, you’re not thinking; you’re just being logical”, Niels Bohr.

- La lógica suele presentarse como la forma más avanzada del razonamiento
- Pero abundan las situaciones donde el razonamiento lógico no es la mejor opción
- A veces hay que escoger entre lo que es racional y lo que es lógico en un sentido absoluto
- También es posible preguntarnos cómo se puede adaptar la lógica para acercarse más a procesos que consideramos racionales pero que difieren de la lógica pura

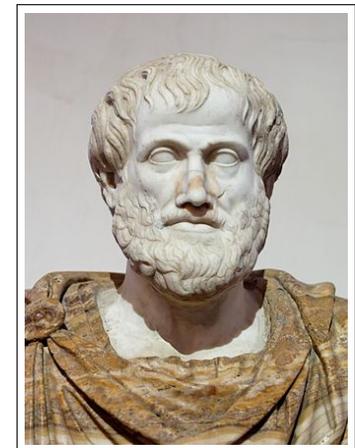
## Algunos problemas planteados por la lógica en el razonamiento

- La inverosimilitud de la omnisciencia lógica
- La incompletitud de sus métodos
- La indecidibilidad de la mayoría de los lenguajes lógicos
- La ineficiencia de la inferencia lógica
- Y la enorme diferencia con el razonamiento humano

Y, sin embargo, la lógica se usa de manera creciente en las matemáticas, las ciencia de la computación y la filosofía

## Había una vez...

- Aristóteles es considerado un buen punto de partida para la historia de la lógica
- Durante milenios, sus silogismos se consideraron el núcleo de la disciplina



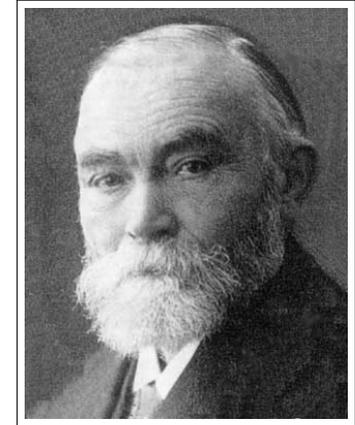
## Lebniz y el *calculus ratiotinator*

- Leibniz es el siguiente nombre importante para el tipo de lógica que veremos aquí
- Su propuesta fue usar un lenguaje formal y un cálculo para este lenguaje



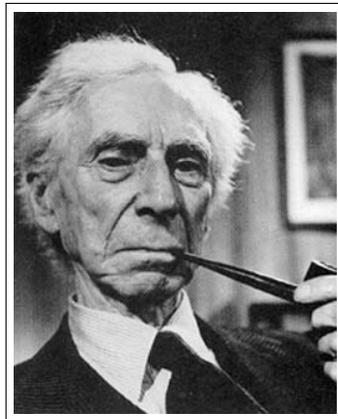
## Formalización del razonamiento matemático

- Frege es uno de los creadores del lenguaje del cálculo de predicados
- El proyecto de formalizar las matemáticas arranca en serio con él



## *Principia Mathematica*

- Russell y Whitehead aplican esta idea en su libro *Principia Mathematica*
- El libro se convirtió en un modelo de lo que se esperaba de la lógica



## El gran proyecto

- Hilbert propuso continuar con este proyecto
- Además delineó claramente qué tipo de soluciones eran aceptables
- Su programa se convirtió en el centro del trabajo en lógica matemática

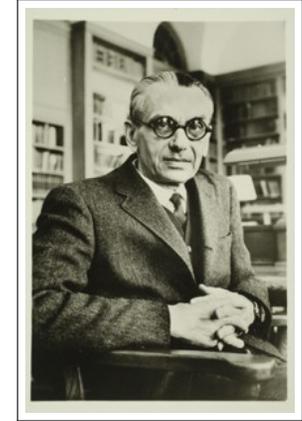


## Los aguafiestas

- Pero justo después se presentaron una serie de resultados que hicieron fracasar el proyecto
- Y las décadas siguientes apilaron más piedras sobre la tumba del proyecto
- Sin embargo, el legado positivo de Hilbert sigue siendo la base de muchos usos prácticos de la lógica

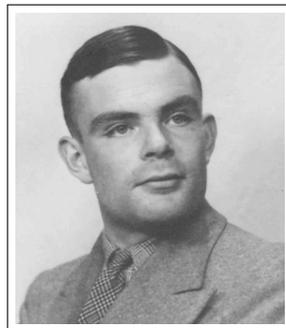
## Verdades inalcanzables

- Poco después de presentar un resultado positivo para el proyecto de Hilbert, Gödel le dio dos golpes demoledores
- El primero fue su teorema sobre la incompletitud de los métodos de Hilbert para la aritmética
- El segundo, es la imposibilidad de demostrar la consistencia de esos métodos por sí mismos



## Problemas incomputables

- Años después, Alan Turing demostró que las fórmulas lógicamente válidas no pueden ser demostradas de manera *efectiva*
- Para esto, definió computabilidad y demostró que no todas las fórmulas válidas son computables
- Esto significa que ni siquiera una versión modesta del programa de Hilbert es viable



## Sí se puede ...pero no ahora

- Algunos resultados posteriores han limitado aún más el alcance de los métodos lógicos
- Entre estos, destaca el teorema de Cook-Levin
- Este teorema implica que en la práctica algunos problemas resolubles con la lógica no se pueden resolver eficientemente
- En pocas palabras, es como si no tuviéramos una solución



## El zoo-lógico

Tenemos una explosión de lenguajes:

- Cálculo de proposiciones, de predicados de primer orden, de predicados de orden superior, predicados de complejidad intermedia
- Lógicas modales ( $S_4$ ,  $S_5$ , multimodal, cálculo my modal)
- Lógica intuicionista, lógica filosófica (relevante, paraconsistente), monótonas, no monótonas, etc, etc.

¿Por qué?

## Clasificaciones

Las lógicas se pueden clasificar de muchas formas

- Por su expresividad (proposiciones, modal prop., predicados primer orden, intermedios, orden superior, etc.)
- Por su poder deductivo (intuicionista, clásica)
- En función de diferentes nociones de consecuencia lógica (monótonas, no monótonas)

## Propiedades de sistemas lógicos

Dependiendo de los problemas que nos interesan, los sistemas lógicos pueden tener distintas propiedades:

- Inferenciales (en sistemas axiomáticos): corrección, completitud, consistencia
- Semánticos: existencia de modelos, tipos de modelos, relaciones entre ellos
- Problemas mixtos: satisfactibilidad, validez, verificación de modelos, etc.

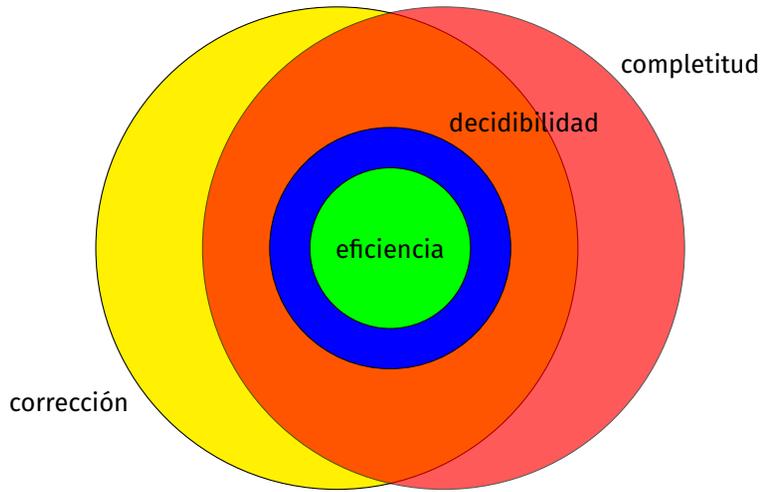
La decidibilidad de estos problemas y la eficiencia computacional de los decidibles son otras propiedades de interés.

## Propiedades metalógicas de sistemas inferenciales

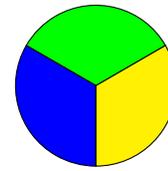
En este curso nos interesarán sobre todo:

- Corrección
- Completitud
- Decidibilidad
- Eficiencia

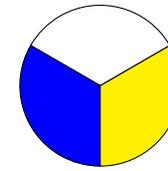
# Relaciones entre propiedades metalógicas



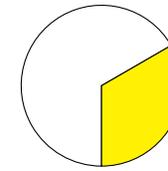
# Expresividad creciente y su efecto o *You cannot have your cake and eat it*



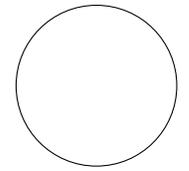
2CNF



Cálculo de proposiciones



Cálculo de predicados de primer orden



Cálculo de predicados de orden superior

Eficiencia "razonable"  Decidibilidad  Completitud 