Lógica Computacional. Tarea 3

1. Un número primo es un número entero que no es divisible por otros números, excepto por sí mismo y por 1. Formaliza el concepto de ser primo por medio de un predicado, suponiendo que ya tienes otro predicado que define divisibilidad.

2. Señala las variables libres y ligadas de las siguientes fórmulas:

   (a) $(\forall x. (\exists y. P_2^2(x, z)) \vee P_2^1(y))$;

   (b) $(\exists x. (\forall z. (\exists y. P_1^3(x, y, z)))) \Leftrightarrow P_2^3(x_1, y, z_2)$;

   (c) $(\exists x. P_1^3(x, y, z)) \Rightarrow P_1^1(x)$;

   (d) $(\forall y. P_1^3(x, y, z)) \wedge (\exists z. P_2^3(x, y, z)) \wedge (\forall x. P_3^3(x, y, z))$.

3. Realiza las siguientes sustituciones:

   (a) $((\exists x. P_1^3(x, y, z)) \Rightarrow P_1^1(x))_{[z:=f_1^2(x,y)]}$;

   (b) $(((\forall x. P_1^3(x, y, z)) \wedge (\forall y. P_1^3(x, y, z)) \wedge (\exists z. P_1^3(x, y, z)))_{[x:=f_1^2(y,z)]})_{[z:=f_1^2(y,x)]}$.

4. Dada la siguiente interpretación, di si las fórmulas (a)–(e) son satisfechas, verdaderas, válidas (o ninguna de las anteriores):

$$\text{Universo de números racionales } \mathbb{Q}$$
$$\Psi(c) = 0 \qquad \Psi(x) = 1 \qquad \Psi(y) = -1$$
$$\Phi(f_1^1) = \text{sucesor} \qquad \Phi(f_2^1) = \text{predecesor} \qquad \Phi(f_1^2) = \div \qquad \Pi(P_1^2) = \leq$$

   (a) $\forall x. \forall y. \neg(y = 0) \Rightarrow \exists z. f_1^2(x, y) = z$;

   (b) $\forall x. \exists y. P_1^2(x, y) \Rightarrow P_1^2(x, y)$;

   (c) $\forall x. \forall y. \exists z. P_1^2(x, y) \Rightarrow P_1^2(x, z) \wedge P_1^2(z, y)$;

   (d) $c = f_2^1(y) \wedge c = f_1^1(x)$;

   (e) $P_1^2(f_2^1(y), c) \wedge P_1^2(c, f_1^1(x))$.

5. Encuentra un modelo para las siguientes fórmulas:

$$\forall x. (\exists y. P_1^2(y, x)) \qquad \exists x. \neg P_2^2(x, c) \wedge P_1^2(x, c)$$
$$\neg \forall x. P_2^2(c, f_1^1(x)) \qquad \neg \exists x. P_2^2(x, f_1^1(x)).$$

6. Demuestra los siguientes teoremas de deducción natural:

   (a) $\vdash_N (\exists x.\, P_1^1(x) \vee P_2^1(x)) \Leftrightarrow (\exists x.\, P_1^1(x)) \vee (\exists x.\, P_2^1(x))$;

   (b) $\forall x.\, (\exists y.\, P_1^1(x) \Rightarrow P_2^1(y)) \vdash_N \neg(\exists x.\, (\forall y.\, P_1^1(x) \wedge \neg P_2^1(y)))$.