LÓGICA COMPUTACIONAL CÁLCULO DE PREDICADOS

Francisco Hernández Quiroz

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
E-mail: fhq@ciencias.unam.mx
Página Web: www.matematicas.unam.mx/fhq

Facultad de Ciencias

Un ejemplo clásico

1. Todos los mamíferos son vertebrados.
2. El elefante es un mamífero.
3. Por tanto, el elefante es vertebrado.

Si formalizáramos el argumento anterior en términos del cálculo de proposiciones tendríamos:

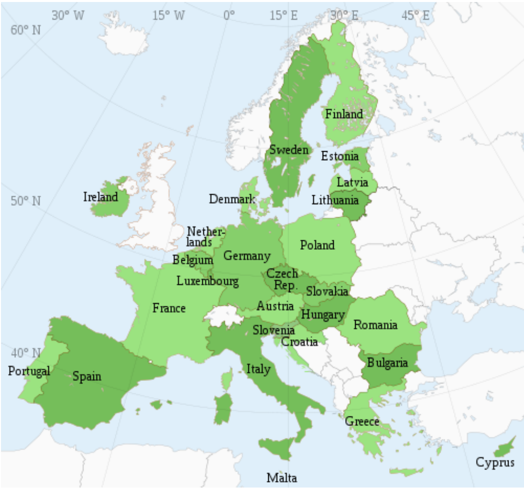
1. p.
2. q.
3. $p, q \models r$

Claramente no es un argumento lógicamente válido. Pero nuestra intuición nos dice que debería serlo.
Su validez reside en las relaciones entre distintas clases (vertebrados, mamíferos, elefantes) y estas relaciones no se pueden expresar en el cálculo de proposiciones.

¿Qué hace falta?

- Necesitamos un lenguaje que nos permita analizar la estructura de las proposiciones.
- En ese lenguaje debemos poder referirnos a objetos, a sus propiedades y a las relaciones de los objetos. Así, podríamos hacer afirmaciones sobre un objeto particular, o sobre algunos objetos o sobre todos ellos.
- Finalmente, el lenguaje debe permitirnos razonar sobre los objetos y sus relaciones más allá de lo que nos permiten las conectivas lógicas proposicionales.
- En las siguientes láminas presentaremos el lenguaje del *cálculo de predicados de primer orden*, que nos permitará formalizar las nociones anteriores.
- Pero antes presentaremos un ejemplo más de objetos y sus relaciones.

La Unión Europea en un mapa



La Unión Europea en una tabla

País	Área en km^2	País	Área en km^2
Alemania	357,386	Hungría	93,030
Austria	83,855	Irlanda	70,273
Bélgica	30,528	Italia	301,338
Bulgaria	110,994	Letonia	64,589
Croacia	56,594	Lituania	65,200
Chipre	9,251	Luxemburgo	2,586.4
Dinamarca	43,075	Malta	316
Eslovaquia	49,035	Países Bajos	41,543
Eslovenia	20,273	Polonia	312,685
España	504,030	Portugal	92,212
Estonia	45,227	República Checa	78,866
Finlandia	338,424	Rumania	238,391
Francia	632,833	Suecia	449,964
Grecia	131,990		

Algunas observaciones

- Francia tiene como vecinos a Alemania, Bélgica, España, Luxemburgo e Italia.
- Su vecino de mayor área es España.
- España tiene como vecinos a Portugal y Francia, pero su vecino de mayor área es Francia.
- La mayoría de los países tiene uno o más vecinos, pero sólo uno es el de mayor área, por supuesto.
- Malta es el país más pequeño de la Unión Europea.
- Francia es el país más grande.
- Alemania es vecina de Polonia y Austria.
- El vecino común de mayor área de Austria y Polonia es Alemania.

Estas afirmaciones se refieren a relaciones entre países de la Unión Europea. No se podrían expresar en el cálculo de proposiciones.

Términos I

- Los términos se refieren a individuos de nuestro universo.
- Pueden ser de tres tipos: constantes, variables y términos que son el resultado de aplicar funciones a otros términos.
- En términos formales, tenemos dos conjuntos básicos:
  - Las constantes:
    $$\mathrm{C} = \{c, c_0, c_1, \ldots\}$$
  - y las variables:
    $$\mathrm{Var} = \{x, y, z, x_0, y_0, z_0, \ldots\}$$

Términos II

El conjunto de términos se define inductivamente:

1. Las constantes son términos.
2. Las variables son términos.
3. Si $t_1, \ldots, t_n$ son términos, entonces $f_k^n(t_1, \ldots, t_n)$ también es un término.
   n representa el número de argumentos de una función y k un subíndice que la distingue de otras funciones.
4. Los únicos términos son los que se pueden crear con un número finito de aplicaciones de las reglas anteriores.

Al conjunto de términos lo denotaremos como T.

Fórmulas I

Las fórmulas del cálculo de predicados nos permiten hacer afirmaciones sobre los términos. Las más simples son las *atómicas*:

$$\mathrm{Pred}_A = \{P^n_k(t_1, \ldots, t_n) \mid 1 \leq n, k \qquad t_1, \ldots, t_n \in \mathrm{T}\}.$$

De nuevo, n representa el número de argumentos de un predicado y k un subíndce que lo distingue de otros.

Y el conjunto de fórmulas se define inductivamente:

1. Las fórmulas atómicas (Pred_A) son fórmulas.
2. Si α y β son fórmulas, también lo son

$$\neg\alpha \quad (\alpha \vee \beta) \quad (\alpha \wedge \beta) \quad (\alpha \Rightarrow \beta) \quad (\alpha \Leftrightarrow \beta).$$

Fórmulas II

3. Si α es una fórmula, también lo son

$$(\forall x.\, \alpha) \qquad (\exists x.\, \alpha).$$

4. Las únicas fórmulas son las que se pueden crear con un número finito de aplicaciones de las reglas anteriores.

Llameremos Pred al conjunto de fórmulas del cálculo de predicados.

Variables libres y ligadas

Una variable en una fórmula puede aparecer libre o ligada. Definiremos dos funciones para calcular los conjuntos de variables libres y ligadas:

$$F : \mathrm{Pred} \to \mathscr{P}(\mathrm{Var}) \quad \text{y} \quad B : \mathrm{Pred} \to \mathscr{P}(\mathrm{Var})$$

donde Pred es el conjunto de fórmulas del cálculo de predicados.

$$\begin{array}{llll}
F(P^n_k(t_1, \ldots, t_n)) & = \{x \mid x \in t_i\} & B(P^n_k(t_1, \ldots, t_n)) & = \emptyset \\
F(\neg\alpha) & = F(\alpha) & B(\neg\alpha) & = B(\alpha) \\
F(\alpha \vee \beta) & = F(\alpha) \cup F(\beta) & B(\alpha \vee \beta) & = B(\alpha) \cup B(\beta) \\
\ldots & & & \\
F(\forall x.\, \alpha) & = F(\alpha) - \{x\} & B(\forall x.\, \alpha) & = B(\alpha) \cup \{x\} \\
F(\exists x.\, \alpha) & = F(\alpha) - \{x\} & B(\exists x.\, \alpha) & = B(\alpha) \cup \{x\}
\end{array}$$

Fórmulas cerradas

Definición 3.1

*Una fórmula $\alpha \in \mathrm{Pred}$ es **cerrada** sii $F(\alpha) = \emptyset$.*
*Si α tiene las variables libres $x_1, \ldots, x_n$, entonces su **cerradura** es la fórmula $\forall x_1.\, \forall x_n.\, \alpha$.*

Las fórmulas cerradas tendrán un papel central más adelante.

Sustitución en términos

Las funciones anteriores servirán para poder sustituir variables libres por términos en fórmulas arbitrarias de Pred.
Comenzamos con las sustituciones en términos:

1. $x_{[x:=t]} = t$
2. $y_{[x:=t]} = y$ si $x \neq y$
3. $c_{[x:=t]} = c$ si $c \in C$
4. $f^n_m(t_1, \ldots, t_n)_{[x:=t]} = f^n_m(t_{1[x:=t]}, \ldots, t_{n[x:=t]})$

Sustitución en fórmulas

Ahora veremos las sustituciones en fórmulas:

1. $P^n_m(t_1, \ldots, t_n)_{[x:=t]} = P^n_m(t_{1[x:=t]}, \ldots, t_{n[x:=t]})$
2. (a) $(\neg\alpha)_{[x:=t]} = \neg(\alpha_{[x:=t]})$
   (b) $(\alpha \vee \beta)_{[x:=t]} = (\alpha_{[x:=t]} \vee \beta_{[x:=t]})$
   (c) $(\alpha \wedge \beta)_{[x:=t]} = (\alpha_{[x:=t]} \wedge \beta_{[x:=t]})$
   (d) $(\alpha \Rightarrow \beta)_{[x:=t]} = (\alpha_{[x:=t]} \Rightarrow \beta_{[x:=t]})$
   (e) $(\alpha \Leftrightarrow \beta)_{[x:=t]} = (\alpha_{[x:=t]} \Leftrightarrow \beta_{[x:=t]})$
3. (a) $(\forall x.\, \alpha)_{[x:=t]} = (\forall x.\, \alpha)$
   (b) $(\forall y.\, \alpha)_{[x:=t]} = (\forall y.\, \alpha_{[x:=t]})$ si $x \notin F(\alpha)$ o $y \notin t$
   (c) $(\forall y.\, \alpha)_{[x:=t]} = \forall z.\, (\alpha_{[y:=z]})_{[x:=t]}$ si $x \in F(\alpha)$ y $y \in t$ (z una variable nueva)

(d), (e) y (f) corresponden al cuantificador existencial $\exists$ y son análogas.

De nuevo el mapa de la Unión Europea I

Ahora se pueden expresar formalmente algunas de las relaciones del ejemplo del mapa de la Unión Europea:

- Los países x y y son vecinos
$$P^2_1(x, y).$$
- El vecino de mayor área del país x
$$f^1_1(x).$$
- El vecino común de mayor área de los países x y y
$$f^2_1(x, y).$$

De nuevo el mapa de la Unión Europea II

- Si c, c_1, c_2 representan a España, Portugal y Francia, entonces
$$P^2_1(c, c_1) \wedge P^2_1(c, c_2),$$
pero
$$f^1_1(c) = c_2.$$
- Si c_3 es Malta y P^1_1 es ser el país más pequeño de la Unión Europea, entonces
$$P^1_1(c_3).$$
- Y si P^1_2 es ser el país más grande, entonces
$$P^1_2(c_2).$$

De nuevo el mapa de la Unión Europea III

- Sean c_4, c_5, c_6 Alemania, Polonia y Austria, respectivamente. Entonces

$$P_1^2(c_4, c_5) \wedge P_1^2(c_4, c_6) \qquad c_4 = f_1^2(c_5, c_6).$$

Pero también podemos decir cosas más generales:

- Si un país es el más grande de Europa, entonces es el vecino de mayor tamaño de entre sus vecinos

$$\forall x.\, \forall y.\, P_2^1(x) \wedge P_1^2(x, y) \Rightarrow x = f_1^1(y).$$

- La vecindad entre países no es transitiva, es decir “tus vecinos no necesariamento son mis vecinos”

$$\exists x.\, \exists y.\, \exists z.\, P_1^2(x, y) \wedge P_1^2(y, z) \wedge \neg P_1^2(x, z).$$

¿Qué diferencia hay entre relaciones y funciones? I

- Una símbolo de predicado P_k^n nos habla de algo que relaciona a n objetos en nuestro universo.
- Una función nos habla de una correspondencia de uno o varios objetos con otro objeto *único*.
- Esta correspondencia puede verse también como una relación entre objetos, i.e., las funciones se pueden ver como relaciones.
- Por ejemplo, la sucesión

$$1 = 1, 2 = 4, 3 = 9, 4 = 16 \ldots$$

se puede representar de dos maneras

$$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots$$
$$(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16), \ldots$$

¿Qué diferencia hay entre relaciones y funciones? II

En nuestro formalismo, la primera corresponde a f_k^1 y la segunda a P_k^2.
Y podemos elegir la que más nos convenga.

- Pero no toda relación se puede representar con una función. Ser vecino es un caso. ¿Cuál sería el resultado de aplicar la función ser vecino a España? ¿Francia o Portugal?

Otros ejemplos de formalización de nociones básicas

- Ser el padre o la madre biológicos de alguien (f_1^1 y f_2^1 son funciones que denotan padre y madre):

$$f_1^1(y) \qquad f_2^1(y).$$

- La relación de hermano (el predicado P_1^2 relaciona hermanos):

$$P_1^2(x, y).$$

  Nótese que es una relación y no una función (¿por qué?).
- Un par de axiomas sobre hermanos:

$$\forall x.\, \neg P_1^2(x, x) \qquad \forall x.\, \forall y.\, P_1^2(x, y) \Rightarrow f_1^1(x) = f_1^1(y) \wedge f_2^1(x) = f_2^1(y)$$

  es decir, nadie es su propio hermano y los hermanos tienen los mismos padres (¿cómo formalizarías “ser medio hermano”?).

Semántica

La semántica de Pred se basa en el concepto de *interpretación*. Una interpretación I consiste en un conjunto U al que llamaremos el *universo* de interpretación y tres funciones

$$\begin{aligned} \Psi &: \mathrm{Var} \cup \mathrm{C} \to U \\ \Phi &: \{f_k^n\} \to \{\varphi : U^n \to U\} \\ \Pi &: \{P_k^n\} \to \{R \subseteq U^n\} \end{aligned}$$

Las funciones Ψ y Φ se combinan para la interpretación de términos más complejos:

$$\hat{\Psi}(f_k^n(t_1, \ldots, t_n)) = \Phi(f_k^n)(\hat{\Psi}(t_1), \ldots, \hat{\Psi}(t_n)).$$

Satisfacción I

La *satisfacción* es una relación entre interpretaciones y fórmulas de Pred. Sea $\alpha \in$ Pred y sea $I = \langle \Psi, \Phi, \Pi \rangle$ una interpretación. Diremos que I *satisface* α si se cumplen las siguientes condiciones definidas inductivamente en la estructura de α:

1. $\alpha = P_k^n(t_1, \ldots, t_n)$ y $(\Psi(t_1), \ldots, \Psi(t_n)) \in \Pi(P_k^n)$;
2. $\alpha = \neg\beta$ e I no satisface β;
3. $\alpha = \beta \vee \gamma$ e I satisface β o satisface γ;

   ...
4. $\alpha = (\forall x. \beta)$ y para toda $I' = \langle \Psi', \Phi, \Pi \rangle$, donde

$$\begin{aligned} \Psi'(c) &= \Psi(c) \quad \forall c \in \mathrm{C} \\ \Psi'(y) &= \Psi(y) \quad \forall y \in \mathrm{Var}.\, x \neq y \end{aligned}$$

I' satisface β.

Satisfacción II

5. $\alpha = (\exists x. \beta)$ y existe $I' = \langle \Psi', \Phi, \Pi \rangle$, donde

$$\begin{aligned} \Psi'(c) &= \Psi(c) \quad \forall c \in \mathrm{C} \\ \Psi'(y) &= \Psi(y) \quad \forall y \in \mathrm{Var}.\, x \neq y \end{aligned}$$

tal que I' satisface β.

Verdad y validez I

- La satisfacción es un concepto más débil que el de *verdad*. Éste último se define en función de la satisfacción.
- Sea α una fórmula y sea I una interpretación. Diremos que *α es verdadera en I* sii para toda $I' = \langle \Psi', \Phi, \Pi \rangle$, donde

$$\Psi'(c) = \Psi(c) \qquad \forall c \in \mathrm{C}$$

  se tiene que I' satisface α. En ese caso, escribiremos

$$\models_I \alpha.$$

- Una fórmula α es *falsa* sii $\neg\alpha$ es verdadera.
- Nótese que con estas definiciones se pierde la dualidad entre verdad y falsedad: si una fórmula no es verdadera, no necesariamente es falsa.

Verdad y validez II

- También se sigue de estas definiciones que una fórmula cerrada o bien es verdadera o bien es falsa.
- El concepto de *validez* es análogo al de tautología en el cálculo de proposiciones: α es *válida* sii para toda interpretación I se tiene que

$$\models_I \alpha.$$

Ejemplos

Considérense las fórmulas

1. $P^2_1(x, c)$
2. $\forall x. P^2_1(x, c)$
3. $\forall x. P^2_1(c, x)$
4. $P^1_1(x) \lor \neg P^1_1(x)$

y la interpretación $I_{\mathbb{N}} = \langle \Psi, \Phi, \Pi \rangle$, donde

$$\Psi : \mathrm{Var} \cup \mathrm{C} \to \mathbb{N} \qquad \Phi : \{f^n_k\} \to \{\varphi : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}\} \qquad \Pi : \{P^n_k\} \to \{R \subseteq \mathbb{N}^n\}$$

y en especial

$$\Psi(x) = 0 \quad \Psi(c) = 0 \quad \Pi(P^2_1) = \leq \quad \Pi(P^1_1) = \{n \mid n \text{ es par}\}.$$

$I_{\mathbb{N}}$ satisface las fórmulas 1, 3 y 4, pero sólo las fórmulas 3 y 4 son verdaderas. Además, la fórmula 4 es válida, pues será verdadera para cualquier otra interpretación que se elija.

Modelos

Sea I una interpretación y sea Γ un conjunto de fórmulas. Diremos que I es un *modelo* de Γ sii

$$\models_I \gamma \qquad \forall \gamma \in \Gamma.$$

Consecuencia lógica

Definición 3.2

Consideremos las fórmulas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta$. Diremos que

$$\beta \text{ es consecuencia lógica de } \alpha_1, \ldots, \alpha_n$$

sii para toda interpretación I

$$\text{si} \quad \models_I \alpha_1, \ldots, \models_I \alpha_n \qquad \text{entonces} \quad \models_I \beta.$$

En ese caso, escribiremos

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \models \beta.$$

Obsérvese que esta definición es el equivalente de *argumento válido* para el cálculo de proposiciones.

Indecidibilidad semántica

Teorema 3.3

No existe un algoritmo que nos permita determinar, para toda α arbitraria, si $\models \alpha$ o $\not\models \alpha$.

- El problema de determinar la validez de una fórmula del cálculo de predicados de primer orden se conoce como *Entscheidungsproblem*.
- Fue planteado por primera vez por David Hilbert y sus alumnos.
- Alonzo Church demostró por primera vez este resultado negativo.
- Poco después Alan Turing demostró la equivalencia entre este problema y el de la detención de las máquinas de Turing (*halting problem*).

Sistemas de demostración

Los sistemas de demostración del cálculo de predicados son una extensión de las ideas vistas en cálculo de proposiciones:

- Se tiene un conjunto (finito) de reglas de inferencia.
- Una demostración es una sucesión de fórmulas de las cuales la última es la conclusión y las anteriores son o bien premisas o bien aplicaciones de las reglas de inferencia (con sustitución) a partir de fórmulas ya demostradas.
- En una demostración es posible utilizar (instancias de) teoremas ya demostrados.

Deducción natural

$$I\forall \quad \frac{\boxed{\begin{array}{l} \hfill I\forall\, n \\ \vdots \\ \alpha_{[x:=n]} \end{array}}}{\forall x.\, \alpha} \qquad E\forall \quad \frac{\forall x.\, \alpha}{\alpha_{[x:=t]}}$$

$$I\exists \quad \frac{\alpha_{[x:=t]}}{\exists x.\, \alpha} \qquad E\exists \quad \frac{\exists x.\, \alpha \quad \boxed{\begin{array}{l} \alpha_{[x:=n]} \hfill E\exists\, n \\ \vdots \\ \beta \end{array}}}{\beta}$$

La variable especial n en $I\forall$ y $E\exists$ tiene que ser *nueva*, i.e. que no se haya usado previamente en la demostración y que no aparezca en β.

Ejemplos. Regla $E\forall$

Demostraremos el teorema

$$\forall x.\, P^1_1(x) \Rightarrow P^1_2(x), P^1_1(c) \vdash P^1_2(c)$$

1	$\forall x.\, P^1_1(x) \Rightarrow P^1_2(x)$	Prem
2	$P^1_1(c)$	Prem
3	$P^1_1(c) \Rightarrow P^1_2(c)$	$E\forall$ 1
4	$P^1_2(c)$	$E\Rightarrow$ 3, 2

Ejemplos. Regla $I\exists$

Demostraremos el teorema

$$\forall x.\, P^1_1(x) \Rightarrow P^1_2(x), P^1_1(c) \vdash \exists x.\, P^1_2(x)$$

1	$\forall x.\, P^1_1(x) \Rightarrow P^1_2(x)$	Prem
2	$P^1_1(c)$	Prem
3	$P^1_1(c) \Rightarrow P^1_2(c)$	$E\forall$ 1
4	$P^1_2(c)$	$E\Rightarrow$ 3, 2
5	$\exists x.\, P^1_2(x)$	$I\exists$ 4

Ejemplos. Regla $I\forall$

Demostraremos el teorema

$$\forall x.\, P^1_1(x) \Rightarrow P^1_2(x), \forall x.\, P^1_2(x) \Rightarrow P^1_3(x) \vdash \forall x.\, P^1_1(x) \Rightarrow P^1_3(x)$$

1	$\forall x.\, P^1_1(x) \Rightarrow P^1_2(x)$	Prem
2	$\forall x.\, P^1_2(x) \Rightarrow P^1_3(x)$	Prem
	$I\forall\, n$	
3	$P^1_1(n) \Rightarrow P^1_2(n)$	$E\forall$ 1
4	$P^1_2(n) \Rightarrow P^1_3(n)$	$E\forall$ 2
5	$P^1_1(n) \Rightarrow P^1_3(n)$	$Teo\ \alpha \Rightarrow \beta, \beta \Rightarrow \gamma \vdash \alpha \Rightarrow \gamma$
6	$\forall x.\, P^1_1(x) \Rightarrow P^1_3(x)$	$I\forall$

Ejemplos. Regla $E\exists$

Finalmente, demostraremos el teorema

$$\forall x.\, P^1_1(x) \Rightarrow P^1_2(x), \exists x.\, P^1_1(x) \vdash \exists x.\, P^1_2(x)$$

1	$\forall x.\, P^1_1(x) \Rightarrow P^1_2(x)$	Prem
2	$\exists x.\, P^1_1(x)$	Prem
	$E\exists\, n$	
3	$P^1_1(n)$	Hip
4	$P^1_1(n) \Rightarrow P^1_2(n)$	$E\forall$ 1
5	$P^1_2(n)$	$E\Rightarrow$ 4, 3
6	$\exists x.\, P^1_2(x)$	$I\exists$ 5
7	$\exists x.\, P^1_2(x)$	$E\exists$ 2

Ejemplos. $(\forall x.\, \alpha) \Leftrightarrow (\neg\exists x.\, \neg\alpha)$. Parte I

Éste no es un teorema, sino una serie de teoremas, uno por cada α posible.

1	$\forall x.\, \alpha$	Hipótesis
2	$\exists x.\, \neg\alpha$	Hipótesis
	$E\exists\, n$	
3	$\neg\alpha_{[x:=n]}$	Hipótesis
4	$\alpha_{[x:=n]}$	$E\forall$ 1
5	$\bot$	$I\bot$ 3, 4
6	$\bot$	$E\exists$ 2
7	$\neg\exists x.\, \neg\alpha$	$I\neg$ 2
8	$(\forall x.\, \alpha) \Rightarrow (\neg\exists x.\, \neg\alpha)$	$I\Rightarrow$

Ejemplos. $(\forall x.\,\alpha) \Leftrightarrow (\neg\exists x.\,\neg\alpha)$. Parte II

9	$\neg\exists x.\,\neg\alpha$	Hipótesis
	$I\forall m$	
10	$\neg\alpha_{[x:=m]}$	Hipótesis
11	$\exists x.\,\neg\alpha$	$I\exists$ 10
12	$\bot$	$I\bot$ 9, 11
13	$\alpha_{[x:=m]}$	$E\neg$ 10
14	$\forall x.\,\alpha$	$I\forall$ 13
15	$(\neg\exists x.\,\neg\alpha) \Rightarrow (\forall x.\,\alpha)$	$I\Rightarrow$
16	$(\forall x.\,\alpha) \Leftrightarrow (\neg\exists x.\,\neg\alpha)$	$I\Leftrightarrow$ 8, 15

Ejemplos. Cambio de orden de variables

Para el teorema $\forall x.\,\forall y.\,\alpha \vdash_N \forall y.\,\forall x.\,\alpha$ utilizaremos una propiedad de las sustituciones. Si $x \notin t_1$ y $y \notin t_2$ entonces

$$(\alpha_{[x:=t_2]})_{[y:=t_1]} = (\alpha_{[y:=t_1]})_{[x:=t_2]}.$$

1	$\forall x.\,\forall y.\,\alpha$	Premisa
	$I\forall n$	
	$I\forall m$	
2	$\forall y.\,\alpha_{[x:=m]}$	$E\forall$ 1
3	$(\alpha_{[x:=m]})_{[y:=n]}$	$E\forall$ 2
4	$(\alpha_{[y:=n]})_{[x:=m]}$	Propiedad especial
5	$\forall x.\,\alpha_{[y:=n]}$	$I\forall$ 4
6	$\forall y \forall x.\,\alpha$	$I\forall$ 5

Ejemplos. $(\forall x.\,\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow (\forall x.\,\alpha) \wedge (\forall x.\,\beta)$. Parte I

1	$\forall x.\,\alpha \wedge \beta$	Hipótesis
	$I\forall m$	
2	$(\alpha \wedge \beta)_{[x:=m]}$	$E\forall$ 1
3	$\alpha_{[x:=m]} \wedge \beta_{[x:=m]}$	Reglas de sustitución
4	$\alpha_{[x:=m]}$	$E\wedge$ 3
5	$\forall x.\,\alpha$	$I\forall$ 5
	$I\forall n$	
6	$(\alpha \wedge \beta)_{[x:=n]}$	$E\forall$ 1
7	$\alpha_{[x:=n]} \wedge \beta_{[x:=n]}$	Reglas de sustitución
8	$\beta_{[x:=n]}$	$E\wedge$ 7
9	$\forall x.\,\beta$	$I\forall$ 8
10	$(\forall x.\,\alpha) \wedge (\forall x.\,\beta)$	$I\wedge$ 5, 9
11	$(\forall x.\,\alpha \wedge \beta) \Rightarrow (\forall x.\,\alpha) \wedge (\forall x.\,\beta)$	$I\Rightarrow$

Ejemplos. $(\forall x.\,\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow (\forall x.\,\alpha) \wedge (\forall x.\,\beta)$. Parte II

12	$(\forall x.\,\alpha) \wedge (\forall x.\,\beta)$	Hipótesis
	$I\forall k$	
13	$\forall x.\,\alpha$	$E\wedge$ 12
14	$\forall x.\,\beta$	$E\wedge$ 12
15	$\alpha_{[x:=k]}$	$E\forall$ 13
16	$\beta_{[x:=k]}$	$E\forall$ 14
17	$\alpha_{[x:=k]} \wedge \beta_{[x:=k]}$	$I\wedge$ 15, 16
18	$(\alpha \wedge \beta)_{[x:=k]}$	Reglas de sustitución
19	$\forall x.\,\alpha \wedge \beta$	$I\forall$ 18
20	$(\forall x.\,\alpha) \wedge (\forall x.\,\beta) \Rightarrow (\forall x.\,\alpha \wedge \beta)$	$I\Rightarrow$
21	$(\forall x.\,\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow (\forall x.\,\alpha) \wedge (\forall x.\,\beta)$	$I\Leftrightarrow$ 11, 20

Aclaraciones sobre los nombres $n, m, \ldots$ en $E\,\exists$ e $I\,\forall$

- Los símbolos utilizados en las reglas $E\,\exists$ e $I\,\forall$ son especiales.
- No forman parte de nuestro lenguaje original, sino que sólo aparecen en el curso de las demostraciones.
- En particular, difieren de las variables en que no se pueden cuantificar.
- En una interpretación, se asemejan a las constantes porque las variantes de una interpretación que utilizamos para definir verdad o satisfacción no pueden alterar su significado.
- Por estas razones, en algunos libros se les llaman *nombres ambiguos*.
- Recuérdese que al introducir uno de estos nombres, debe usarse siempre un símbolo totalmente nuevo.

Propiedades de los sistemas de demostración

Definición 3.4

Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ y β fórmulas. Un sistema de demostración $\vdash$ es:

- *correcto sii $\vdash \beta$ implica que $\models \beta$;*
- *correcto en sentido amplio sii*
$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vdash \beta \text{ implica } \alpha_1, \ldots, \alpha_n \models \beta;$$
- *completo sii $\models \beta$ implica que $\vdash \beta$;*
- *completo en sentido amplio sii*
$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \models \beta \text{ implica } \alpha_1, \ldots, \alpha_n \vdash \beta;$$
- *consistente sii no existe una fórmula γ tal que $\vdash \gamma$ y $\vdash \neg\gamma$;*
- *decidible sii existe un "procedimiento efectivo" para determinar, dada una fórmula arbitraria γ, si $\vdash \gamma$ o $\nvdash \gamma$.*