LÓGICA COMPUTACIONAL
CÁLCULO DE PREDICADOS

Francisco Hernández Quiroz

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
E-mail: fhq@ciencias.unam.mx
Página Web: www.matematicas.unam.mx/fhq

Facultad de Ciencias

Términos

Tenemos dos conjuntos básicos. Las variables:

$$\text{Var} = \{x, y, z, x_0, y_0, z_0, \dots\}$$

y las constantes:

$$\text{C} = \{c, c_0, c_1, \dots\}$$

Los términos se definen así

$$T ::= X \mid C \mid f_k^n(T_1, \dots, T_n),$$

donde $X \in \text{Var}$, $C \in \text{C}$ y $T_1, \dots, T_n$ son términos.
Al conjunto de términos lo denotaremos como T.

Fórmulas

Las fórmulas atómicas se definen así

$$\text{Pred}_A = \{P_k^n(t_1, \dots, t_n) \mid 1 \leq n, k \qquad t_1, \dots, t_n \in \text{T}\}$$

El conjunto de fórmulas se genera por la siguiente gramática

$$\alpha ::= \phi \mid \neg\alpha \mid (\alpha \vee \alpha) \mid \cdots \mid (\forall x \,.\, \alpha) \mid (\exists x \,.\, \alpha),$$

donde $\phi \in \text{Pred}_A$ y $x \in \text{Var}$.

Variables libres y ligadas

Una variable en una fórmula puede aparecer libre o ligada. Definiremos dos funciones para calcular los conjuntos de variables libres y ligadas:

$$F : \text{Pred} \to \mathcal{P}(\text{Var}) \quad \text{y} \quad B : \text{Pred} \to \mathcal{P}(\text{Var})$$

donde Pred es el conjunto de fórmulas del cálculo de predicados.

$$\begin{array}{llll}
F(P_k^n(t_1, \dots, t_n)) & = \{x \mid x \in t_i\} & B(P_k^n(t_1, \dots, t_n)) & = \emptyset \\
F(\neg\alpha) & = F(\alpha) & B(\neg\alpha) & = B(\alpha) \\
F(\alpha \vee \beta) & = F(\alpha) \cup F(\beta) & B(\alpha \vee \beta) & = B(\alpha) \cup B(\beta) \\
\dots & & & \\
F(\forall x \,.\, \alpha) & = F(\alpha) - \{x\} & B(\forall x \,.\, \alpha) & = B(\alpha) \cup \{x\} \\
F(\exists x \,.\, \alpha) & = F(\alpha) - \{x\} & B(\exists x \,.\, \alpha) & = B(\alpha) \cup \{x\}
\end{array}$$

Sustitución en términos

Las funciones anteriores servirán para poder sustituir variables libres por términos en fórmulas arbitrarias de Pred.
Comenzamos con las sustituciones en términos:

1. $x_{[x:=t]} = t$
2. $y_{[x:=t]} = y$ si $x \neq y$
3. $c_{[x:=t]} = c$ si $c \in C$
4. $f^n_m(t_1, \ldots, t_n)_{[x:=t]} = f^n_m(t_{1\,[x:=t]}, \ldots, t_{n[x:=t]})$

Sustitución en fórmulas

Ahora veremos las sustituciones en fórmulas:

1. $P^n_m(t_1, \ldots, t_n)_{[x:=t]} = P^n_m(t_{1\,[x:=t]}, \ldots, t_{n[x:=t]})$
2. (a) $(\neg\alpha)_{[x:=t]} = \neg(\alpha_{[x:=t]})$
   (b) $(\alpha \vee \beta)_{[x:=t]} = (\alpha_{[x:=t]} \vee \beta_{[x:=t]})$
   (c) $(\alpha \wedge \beta)_{[x:=t]} = (\alpha_{[x:=t]} \wedge \beta_{[x:=t]})$
   (d) $(\alpha \Rightarrow \beta)_{[x:=t]} = (\alpha_{[x:=t]} \Rightarrow \beta_{[x:=t]})$
   (e) $(\alpha \Leftrightarrow \beta)_{[x:=t]} = (\alpha_{[x:=t]} \Leftrightarrow \beta_{[x:=t]})$
3. (a) $(\forall x \,.\, \alpha)_{[x:=t]} = (\forall x \,.\, \alpha)$
   (b) $(\forall y \,.\, \alpha)_{[x:=t]} = (\forall y \,.\, \alpha_{[x:=t]})$ si $x \notin FV(\alpha)$ o $y \notin t$
   (c) $(\forall y \,.\, \alpha)_{[x:=t]} = \forall z \,.\, (\alpha_{[y:=z]})_{[x:=t]}$ si $x \in FV(\alpha)$ y $y \in t$ (z una variable nueva)

(d), (e) y (f) corresponden al cuantificador existencial $\exists$ y son análogas.

Semántica

La semántica de Pred se basa en el concepto de *interpretación*. Una interpretación I consiste en un conjunto U al que llamaremos el *universo* de interpretación y tres funciones

$$\begin{aligned} \Psi &: \mathrm{Var} \cup \mathrm{C} \to U \\ \Phi &: \{f^n_k\} \to \{\phi : U^n \to U\} \\ \Pi &: \{P^n_k\} \to \{R \subseteq U^n\} \end{aligned}$$

Las funciones Ψ y Φ se combinan para la interpretación de términos más complejos:

$$\hat{\Psi}(f^n_k(t_1, \ldots, t_n)) = \Phi(f^n_k)(\hat{\Psi}(t_1), \ldots, \hat{\Psi}(t_n)).$$

Satisfacción I

La *satisfacción* es una relación entre interpretaciones y fórmulas de Pred. Sea $\alpha \in$ Pred y sea $I = \langle \Psi, \Phi, \Pi \rangle$ una interpretación. Diremos que I *satisface* α si se cumplen las siguientes condiciones definidas inductivamente en la estructura de α:

1. $\alpha = P^n_k(t_1, \ldots, t_n)$ y $(\Psi(t_1), \ldots, \Psi(t_n)) \in \Pi(P^n_k)$;
2. $\alpha = \neg\beta$ e I no satisface β;
3. $\alpha = \beta \vee \gamma$ e I satisface β o satisface γ;

   ...
4. $\alpha = (\forall x \,.\, \beta)$ y para toda $I' = \langle \Psi', \Phi, \Pi \rangle$, donde

$$\begin{aligned} \Psi'(c) &= \Psi(c) \quad \forall c \in \mathrm{C} \\ \Psi'(y) &= \Psi(y) \quad \forall y \in \mathrm{Var} \,.\, x \neq y \end{aligned}$$

   I' satisface β.

Satisfacción II

5. $\alpha = (\exists x \,.\, \beta)$ y existe $I' = \langle \Psi', \Phi, \Pi \rangle$, donde

$$\begin{aligned} \Psi'(c) &= \Psi(c) \quad \forall c \in C \\ \Psi'(y) &= \Psi(y) \quad \forall y \in \text{Var} \,.\, x \neq y \end{aligned}$$

tal que I' satisface β.

Verdad y validez

La satisfacción es un concepto más débil que el de *verdad*. Éste último se define en función de la satisfacción:
Sea α una fórmula y sea I una interpretación. Diremos que α *es verdadera en I* sii para toda $I' = \langle \Psi', \Phi, \Pi \rangle$, donde

$$\Psi'(c) = \Psi(c) \qquad \forall c \in C$$

se tiene que I' satisface α. En ese caso, escribiremos

$$\models_I \alpha.$$

El concepto de *validez* es análogo al de tautología en el cálculo de proposiciones:
α es válidad sii para toda interpretación I se tiene que

$$\models_I \alpha.$$

Ejemplos

Considérense las fórmulas

1. $P_1^2(x, c)$
2. $\forall x \,.\, P_1^2(x, c)$
3. $\forall x \,.\, P_1^2(c, x)$
4. $P_1^1(x) \vee \neg P_1^1(x)$

y la interpretación $I_{\mathbb{N}} = \langle \Psi, \Phi, \Pi \rangle$, donde

$$\Psi : \text{Var} \cup C \to \mathbb{N} \qquad \Phi : \{f_k^n\} \to \{\phi : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}\} \qquad \Pi : \{P_k^n\} \to \{R \subseteq \mathbb{N}^n\}$$

y en especial

$$\Psi(x) = 0 \quad \Psi(c) = 0 \quad \Pi(P_1^2) = \leq \quad \Pi(P_1^1) = \{n \mid n \text{ es par}\}.$$

$I_{\mathbb{N}}$ satisface las fórmulas 1, 3 y 4, pero sólo las fórmulas 3 y 4 son verdaderas. Además, la fórmula 4 es válida, pues será verdadera para cualquier otra interpretación que se elija.

Modelos

Sea I una interpretación y sea Γ un conjunto de fórmulas. Diremos que I es un *modelo* de Γ sii

$$\models_I \gamma \qquad \forall \gamma \in \Gamma.$$

Indecidibilidad semántica

Teorema

No existe un algoritmo que nos permita determinar, para toda α arbitraria, si $\models \alpha$ o $\not\models \alpha$.

Demostración. Es equivalente al problema de la detención.

Sistemas de demostración

Los sistemas de demostración del cálculo de predicados son una extensión de las ideas vistas en cálculo de proposiciones:

- Se tiene un conjunto (finito) de reglas de inferencia.
- Una demostración es una sucesión de fórmulas de las cuales la última es la conclusión y las anteriores son o bien premisas o bien aplicaciones de las reglas de inferencia (con sustitución) a partir de fórmulas ya demostradas.
- En una demostración es posible utilizar (instancias de) teoremas ya demostrados.

Deducción natural

$$I\forall \quad \frac{\boxed{\begin{array}{r} \forall\, I\, n \\ \vdots \\ \alpha_{[x:=n]} \end{array}}}{\forall x \,.\, \alpha} \qquad E\forall \quad \frac{\forall x \,.\, \alpha}{\alpha_{[x:=t]}}$$

$$I\exists \quad \frac{\alpha_{[x:=t]}}{\exists x \,.\, \alpha} \qquad E\exists \quad \frac{\exists x \,.\, \alpha \quad \boxed{\begin{array}{l} \alpha_{[x:=n]} \quad \exists\, I\, n \\ \vdots \\ \beta \end{array}}}{\beta}$$

Ejemplos. Regla $E\,\forall$

Demostraremos el teorema

$$\forall x \,.\, P^1_1(x) \Rightarrow P^1_2(x), P^1_1(c) \vdash P^1_2(c)$$

1	$\forall x \,.\, P^1_1(x) \Rightarrow P^1_2(x)$	*Prem*
2	$P^1_1(c)$	*Prem*
3	$P^1_1(c) \Rightarrow P^1_2(c)$	$E\,\forall$ 1
4	$P^1_2(c)$	$E \Rightarrow$ 3, 2

Ejemplos. Regla $I\exists$

Demostraremos el teorema

$$\forall x \,.\, P_1^1(x) \Rightarrow P_2^1(x), P_1^1(c) \vdash \exists x \,.\, P_2^1(x)$$

1	$\forall x \,.\, P_1^1(x) \Rightarrow P_2^1(x)$	*Prem*
2	$P_1^1(c)$	*Prem*
3	$P_1^1(c) \Rightarrow P_2^1(c)$	$E\forall\ 1$
4	$P_2^1(c)$	$E \Rightarrow 3, 2$
5	$\exists x \,.\, P_2^1(x)$	$I\exists\ 4$

Ejemplos. Regla $I\forall$

Demostraremos el teorema

$$\forall x \,.\, P_1^1(x) \Rightarrow P_2^1(x), \forall x \,.\, P_2^1(x) \Rightarrow P_3^1(x) \vdash \forall x \,.\, P_1^1(x) \Rightarrow P_3^1(x)$$

1	$\forall x \,.\, P_1^1(x) \Rightarrow P_2^1(x)$	*Prem*
2	$\forall x \,.\, P_2^1(x) \Rightarrow P_3^1(x)$	*Prem*
	$I\forall\ n$	
3	$P_1^1(n) \Rightarrow P_2^1(n)$	$E\forall\ 1$
4	$P_2^1(n) \Rightarrow P_3^1(n)$	$E\forall\ 2$
5	$P_1^1(n) \Rightarrow P_3^1(n)$	*Teo* $\alpha \Rightarrow \beta, \beta \Rightarrow \gamma \vdash \alpha \Rightarrow \gamma$
6	$\forall x \,.\, P_1^1(x) \Rightarrow P_3^1(x)$	$I\forall$

Ejemplos. Regla $E\exists$

Finalmente, demostraremos el teorema

$$\forall x \,.\, P_1^1(x) \Rightarrow P_2^1(x), \exists x \,.\, P_1^1(x) \vdash \exists x \,.\, P_2^1(x)$$

1	$\forall x \,.\, P_1^1(x) \Rightarrow P_2^1(x)$	*Prem*
2	$\exists x \,.\, P_1^1(x)$	*Prem*
	$E\exists\ n$	
3	$P_1^1(n)$	*Hip*
4	$P_1^1(n) \Rightarrow P_2^1(n)$	$E\forall\ 1$
5	$P_2^1(n)$	$E \Rightarrow 4, 3$
6	$\exists x \,.\, P_2^1(x)$	$I\exists\ 5$
7	$\exists x \,.\, P_2^1(x)$	$E\exists\ 2$