LÓGICA COMPUTACIONAL
CÁLCULO DE PROPOSICIONES

Francisco Hernández Quiroz

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
E-mail: fhq@ciencias.unam.mx
Página Web: www.matematicas.unam.mx/fhq

Facultad de Ciencias

Sintaxis

La sintaxis del cálculo de proposiciones es muy simple. Por un lado, tenemos el conjunto

$$P_A = \{p, q, r, p_0, \dots\}$$

de proposiciones atómicas y, por otro lado, las conectivas lógicas usuales:

$$\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow .$$

O en notación de Backus-Naur:

$$\alpha ::= P_A \mid \neg\alpha \mid (\alpha \vee \alpha) \mid (\alpha \wedge \alpha) \mid (\alpha \Rightarrow \alpha) \mid (\alpha \Leftrightarrow \alpha)$$

donde

$$P_A ::= p \mid q \mid r \mid p_N \mid q_N \mid r_N,$$

donde N es un número natural.

Semántica

- La semántica del cálculo de proposiciones se expresa en términos de valores de verdad (generalmente).
- Los valores de verdad más utilizados son los valores booleanos $\mathbb{B} = \{V, F\}$.
- Una evaluación es una función $e : P_A \to \mathbb{B}$.
- Esta función se puede extender a proposiciones compuestas cuando se combina con funciones booleanas asociadas a cada una de las conectivas.

Funciones boolenas

Funciones de 0 argumentos

$$V^0 \text{ y } F^0.$$

Funciones de un argumento

	id / π_1^1	V^1	F^1	$\neg$
V	V	V	F	F
F	F	V	F	V

Funciones boolenas binarias

		π_1^2	π_2^2	V^2	F^2	$\wedge$	$\vee$	$\Rightarrow$	$\Leftrightarrow$	$\not\equiv$	$\uparrow$	$\downarrow$	$\Leftarrow$				
V	V	V	V	V	F	V	V	V	V	F	F	F	V	F	F	F	F
V	F	V	F	V	F	F	V	F	F	V	F	V	V	V	F	V	F
F	V	F	V	V	F	F	V	V	F	V	F	V	F	F	V	F	V
F	F	F	F	V	F	F	F	V	V	F	V	V	V	V	V	F	F

π_1 es la proyección 1
π_2 es la proyección del 2
V^2 es la constante verdadero
F^2 es la constante falso
$\wedge$ es la conjunción
$\vee$ es la disyunción
$\Rightarrow$ es la implicación
$\Leftrightarrow$ es doble implicación
$\not\equiv$ es el o exclusivo
$\uparrow$ es la negación conjunta
$\downarrow$ es la negación alternativa
$\Leftarrow$ es la contraimplicación
las 4 siguientes no tienen un nombre estándar

Interdefinibilidad

Teorema

Todas las conectivas se pueden definir en términos de

1. $\neg$ *y una de las siguientes*
   1. $\vee$;
   2. $\wedge$;
   3. $\Rightarrow$;
2. $\uparrow$;
3. $\downarrow$.

Bastan las conectivas binarias para todo

- El teorema anterior parece referirse sólo a las conectivas binarias o unarias.
- Sin embargo, se aplica a las funciones boolenas de cualquier número de argumentos.
- Por ejemplo, la conectiva ternaria siguiente se puede definir en términos de dos binarias:

$$\text{if } p \text{ then } q \text{ else } r \equiv_{def} (p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow r)$$

- Y esto se puede generalizar a cualquier valor de n.

Demostración

- Por inducción en el número de argumentos de la función, con una salvedad:
- Los casos básicos son las constantes, las conectivas unarias y las binarias.
- La hipótesis inductiva es:
  Para toda $k < n$, toda función booleana $f : \{V, F\}^k \to \{V, F\}$ se puede definir con alguna de las opciones del teorema.
- Caso inductivo: toda función booleana $g : \{V, F\}^n \to \{V, F\}$ se puede definir con alguna de las opciones del teorema.
- *Sugerencia*: g se puede expresar como una combinación de una función

$$h : \{V, F\}^{n-1} \to \{V, F\}$$

  y una función

$$b : \{V, F\}^2 \to \{V, F\}.$$

Formas normales I

- Llamaremos *literal* a una fórmula si es una proposición atómica o la negación de una proposición atómica.
- Una fórmula está en *forma normal conjuntiva* (o CNF, para abreviar) si tiene la siguiente forma

$$\bigwedge_{i=1}^{n}\left(\bigvee_{i=1}^{m}\alpha_{i,j}\right),$$

donde $\alpha_{i,j}$ es una literal.
- Una fórmula está en *forma normal disyuntiva* (o DNF, para abreviar) si tiene la siguiente forma

$$\bigvee_{i=1}^{n}\left(\bigwedge_{i=1}^{m}\alpha_{i,j}\right).$$

Formas normales II

- Las fórmulas

$$(p \vee q) \wedge (r \vee \neg p) \qquad\qquad (p \wedge q) \vee (r \wedge \neg p)$$

están en CNF y DNF, respectivamente.
- Cada una de las disyunciones que componen una fórmula en CNF es una cláusula (análogamente para las conjunciones en DNF).
- Si el número de literales que aparece en una cláusula es menor o igual a n, diremos que la fórmula está en nCNF (análogamente, en nDNF).
- Las fórmulas del ejemplo anterior están en 2CNF y 2DNF, respectivamente.

Conversión de fórmulas a CNF y DNF

- Toda fórmula α tiene fórmulas equivalente en CNF y DNF. Por ejemplo, $p \Rightarrow p$ es equivalente a la fórmula $\neg p \vee p$ (que está en 2CNF o 1DNF).
- Para transformar una fórmula arbitraria a CNF se pueden utilizar las equivalencias siguientes de manera sucesiva

$$(\alpha \Rightarrow \beta) \Leftrightarrow (\neg\alpha \vee \beta) \qquad (\alpha \Leftrightarrow \beta) \Leftrightarrow (\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \neg\beta)$$

$$\neg\neg\alpha \Leftrightarrow \alpha \qquad \neg(\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow \neg\alpha \wedge \neg\beta \qquad \neg(\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow \neg\alpha \vee \neg\beta$$

$$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \Leftrightarrow (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma).$$

- Y, desde luego, la conmutatividad de $\vee$ y $\wedge$.

Tautologías, contradicciones y contingencias I

- La mayoría de las proposiciones compuestas son *contingentes*: algunas asignaciones de valores de verdad a sus proposiciones atómicas producen V y otras F. Ejemplo:

$$(p \wedge q)$$

pues si

$$e(p) = e(q) = V$$

entonces

$$e((p \wedge q)) = V,$$

en cambio, si

$$e(p) = V \quad e(q) = F$$

entonces

$$e((p \wedge q)) = F.$$

Tautologías, contradicciones y contingencias II

- Algunas proposiciones siempre son verdaderas sin importar la asignación de valores a sus proposiciones atómicas. Ejemplo:

  $$(p \vee \neg p),$$

  Estas proposiciones se conocen como *tautologías*. Se acostumbra distinguirlas anteponiendo el símbolo $\models$.
- Y otras siempre producen F. Ejemplo:

  $$(p \wedge \neg p).$$

  Éstas se conocen como *contradicciones*.

Consecuencia lógica

El símbolo $\models$ también denota una relación entre conjuntos de proposiciones y fórmulas individuales:

$$\alpha_1, \ldots \alpha_n \models \beta.$$

Que se lee así

"β es consecuencia lógica de $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$"

Las proposiciones $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ se conocen como las *premisas*; y β, como la conclusión.
La expresión completa se conoce como *argumento*.

Argumentos válidos e inválidos

Definición

Un argumento

$$\alpha_1, \ldots \alpha_n \models \beta.$$

es válido *sii para toda evaluación*

$$e : P_A \to \{V, F\}$$

se tiene que si

$$e(\alpha_1) = V \ldots e(\alpha_n) = V,$$

entonces

$$e(\beta) = V.$$

En caso contrario, se dice que el argumento es inválido.

Sistemas de demostración

- Los *sistemas de demostración* son herramientas para verificar la validez de argumentos lógicos por medios estrictamente *sintácticos*.
- Un sistema de demostración está formado por un conjunto (generalmente finito) de *reglas de inferencia* e instrucciones sobre cómo aplicar estas reglas.
- El concepto de *demostración* es el núcleo de un sistema: una demostración es un conjunto de fórmulas que permiten ir de las premisas a la conclusión por medio de transformaciones sintácticas.
- Para que un sistema de demostración sea útil debe cumplir un conjunto de propiedades *metateóricas*: corrección, completitud, etc.

Reglas de inferencia

Sean $\alpha_1, \dots \alpha_n$ y β fórmulas del cálculo de proposiciones. Una *regla de inferencia* tiene la siguiente forma

$$R \quad \frac{\alpha_1, \dots, \alpha_n}{\beta}$$

donde

- $0 \leq n$;
- $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ son las *premisas*;
- β es la conclusión;
- R es el nombre de la regla.

Si $n = 0$, el conjunto de premisas es vacío y este tipo de reglas se conoce como *axioma*.

Ejemplo: Sistema de Łukasiewicz

Axiomas de Łukasiewicz:

$$\begin{array}{ll} A_1 & p \Rightarrow (q \Rightarrow p) \\ A_2 & (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)) \\ A_3 & (\neg p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow (q \Rightarrow p) \end{array}$$

Se tiene una sola regla de derivación: *modus ponens*

$$MP \quad \frac{p \Rightarrow q \qquad p}{q}$$

Demostraciones I

Sean $\eta_1, \dots, \eta_m$ y θ fórmulas y sea S un sistema de demostración. Diremos que θ se infiere de $\eta_1, \dots, \eta_m$ en S sii existe una sucesión finita de fórmulas $\langle \gamma_1, \dots \gamma_k \rangle$ tal que

- $\gamma_k = \theta$;
- para todo $i \leq k$ se tiene uno de los siguientes casos:
  1. existe $j \leq n$ tal que $\gamma_i = \eta_j$;
  2. existen
     - una regla de inferencia $$\frac{\alpha_1, \dots, \alpha_n}{\beta}$$
     - una sustitución de fórmulas atómicas por fórmulas $$\sigma = [p_1 := \psi_1; \dots, p_r := \psi_r]$$
     - y fórmulas $$\gamma_{i_1}, \dots, \gamma_{i_n} \qquad (\text{con } i_1, \dots, i_n < i)$$

Demostraciones II

tales que

$$\begin{array}{rcl} \gamma_{i_1} & = & \alpha_1\sigma \\ \dots & & \\ \gamma_{i_n} & = & \alpha_n\sigma \\ \gamma_i & = & \beta\sigma \end{array}$$

En ese caso diremos que

$$\eta_1, \dots, \eta_m \vdash_S \theta$$

es un teorema de S.

Ejemplo

Aquí tenemos un ejemplo de una demostración: $p, q \Rightarrow (p \Rightarrow r) \vdash_L q \Rightarrow r$:

1	p	premisa
2	$q \Rightarrow (p \Rightarrow r)$	premisa
3	$p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$	A_1
4	$q \Rightarrow p$	MP 1, 3
5	$(q \Rightarrow (p \Rightarrow r)) \Rightarrow ((q \Rightarrow p) \Rightarrow (q \Rightarrow r))$	A_2
6	$(q \Rightarrow p) \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	MP 2, 5
7	$q \Rightarrow r$	MP 4, 6

Deducción natural

- La deducción natural es un sistema con un conjunto grande de reglas de inferencia.
- La deducción natural tiene reglas para introducir (señaladas con I) o eliminar (E) las conectivas lógicas.
- Además, hay tres reglas adicionales: contradicción (C), sustitución (S) y falso (F).
- Algunas reglas contemplan la introducción de *hipótesis* adicionales. Por esta razón, las inferencias que se hagan utilizando estas hipótesis aparecen dentro de cajas. Las cajas se pueden cerrar extrayendo una conclusión de acuerdo con las condiciones de cada regla.

Reglas de deducción natural I

$$I\wedge \quad \frac{p \quad q}{p \wedge q} \qquad\qquad E\wedge \quad \frac{p \wedge q}{p} \quad \frac{p \wedge q}{q}$$

$$I\vee \quad \frac{p}{p \vee q} \quad \frac{q}{p \vee q} \qquad E\vee \quad \frac{p \vee q \quad \boxed{\begin{array}{c} p \\ \vdots \\ r \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c} q \\ \vdots \\ r \end{array}}}{r}$$

$$I\Rightarrow \quad \frac{\boxed{\begin{array}{c} p \\ \vdots \\ q \end{array}}}{p \Rightarrow q} \qquad\qquad E\Rightarrow \quad \frac{p \Rightarrow q \quad p}{q}$$

Reglas de deducción natural II

$$I\Leftrightarrow \quad \frac{p \Rightarrow q \quad q \Rightarrow p}{p \Leftrightarrow q} \qquad E\Leftrightarrow \quad \frac{p \Leftrightarrow q}{p \Rightarrow q} \quad \frac{p \Leftrightarrow q}{q \Rightarrow p}$$

$$F \quad \frac{p \wedge \neg p}{q} \qquad\qquad C \quad \frac{\boxed{\begin{array}{c} p \\ \vdots \\ q \wedge \neg q \end{array}}}{\neg p} \quad \frac{\boxed{\begin{array}{c} \neg p \\ \vdots \\ q \wedge \neg q \end{array}}}{p}$$

$$S \quad \frac{\alpha \Leftrightarrow \beta \quad \gamma_{[p:=\alpha]}}{\gamma_{[p:=\beta]}}$$

Ejemplo 1

Demostraremos algunos teoremas en $\vdash_N$.
Primero $p \Rightarrow q, q \Rightarrow r \vdash_N p \Rightarrow r$.

1	$p \Rightarrow q$	*Premisa*
2	$q \Rightarrow r$	*Premisa*
3	p	*Hipótesis*
4	q	$E \Rightarrow 1, 3$
5	r	$E \Rightarrow 2, 4$
6	$p \Rightarrow r$	$I \Rightarrow$

Ejemplo 2

Ahora, un ejemplo de $E\vee$ y F: $p \vee q, \neg p \vdash_N q$

1	$p \vee q$				*Premisa*
2	$\neg p$				*Premisa*
3	p	*Hip.*	6	q	*Hip.*
4	$p \wedge \neg p$	$I \wedge 3, 2$			
5	q	F 4			
7	q				$E \vee 1$

Propiedades de los sistemas de demostración

Definición

Sea $\vdash$ un sistema de demostración y sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ y β fórmulas. Diremos que $\vdash$ es:
(a) correcto sii $\vdash \beta$ implica que $\models \beta$;
(b) correcto en sentido amplio sii $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vdash \beta$ implica $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \models \beta$;
(c) completo sii $\models \beta$ implica que $\vdash \beta$;
(d) completo en sentido amplio sii $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \models \beta$ implica $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vdash \beta$;
(e) consistente sii no existe una fórmula γ tal que $\vdash \gamma$ y $\vdash \neg\gamma$;
(f) decidible sii existe un "procedimiento efectivo" para determinar, dada una fórmula arbitraria γ, si $\vdash \gamma$ o $\nvdash \gamma$.

Corrección de $\vdash_N$

¿Cuáles de estas propiedades se cumplen en $\vdash_N$. Veremos que todas.
Por ahora demostraremos que cumple con corrección (en sentido amplio):

Teorema

Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ y β fórmulas. Entonces

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vdash_N \beta \quad \textit{implica que} \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_n \models \beta.$$

- Obsérvese que la propiedad más débil de corrección a secas es implicada por corrección en sentido amplio.
- Sin embargo, existen sistemas de demostración que cumplen con corrección, pero no con corrección en sentido amplio.
- En pocas palabras: corrección y corrección en sentido amplio *no* son equivalentes.

Demostración de corrección I

$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vdash_N \beta$ significa que tenemos una demostración

$$\begin{array}{ll} 1 & \gamma_1 \\ \vdots & \vdots \\ k & \gamma_k \end{array}$$

donde $\gamma_k = \beta$.
Obsérvese que la definición de demostración implica también que

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vdash_N \gamma_i \quad \text{para toda } i \leq k.$$

Aprovechando esto, demostraremos un resultado más fuerte, a saber:

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \models \gamma_i \quad \text{para toda } i \leq k.$$

Demostración de corrección II

La demostración será por inducción en demostraciones: dada una i arbitraria, supondremos que para todo $j < i$ se cumple la hipótesis inductiva siguiente:

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \models \gamma_j.$$

Sea entonces $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vdash_N \gamma_i$. La definición de demostración nos dice que existen dos casos:
Caso simple: $\exists m \leq n \,.\, \alpha_m = \gamma_i$, es decir, γ_i es una premisa. Este caso es trivial pues por definición de $\models$

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \models \alpha_m.$$

Caso inferencial: Existe una regla de derivación y fórmulas $\gamma_{j_1}, \ldots, \gamma_{j_m}$ (con $j_1, \ldots, j_m < i$) tales que las premisas de la regla corresponden a estas fórmulas y la conclusión corresponde a γ_i (bajo una sustitución adecuada).

Demostración de corrección III

Este caso se subdivide a su vez en múltiples subcasos, uno por cada regla de $\vdash_N$. Se presentarán sólo algunos ejemplos.
Caso I $\wedge$. Entonces la demostración se ve así:

$$\begin{array}{lll} 1 & \gamma_1 & \\ \vdots & \vdots & \\ j & \gamma_j & \\ \vdots & \vdots & \\ m & \gamma_m & \\ \vdots & \vdots & \\ i & \gamma_j \wedge \gamma_m & I \wedge \text{ en } j \text{ y } m \end{array}$$

es decir, $\gamma_i = \gamma_j \wedge \gamma_m$. Por hipótesis inductiva

$$\begin{array}{ll} \alpha_1, \ldots, \alpha_n & \models \gamma_j \\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n & \models \gamma_m \end{array}$$

Demostración de corrección IV

y por la tabla de verdad de la $\wedge$ y la definición de $\models$

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \models \gamma_j \wedge \gamma_m = \gamma_i$$

Caso I $\Rightarrow$. La demostración se ve así:

$$\begin{array}{lll} 1 & \gamma_1 & \\ \vdots & \vdots & \\ j & \gamma_j & \textit{Hip.} \\ \vdots & \vdots & \\ i-1 & \gamma_{i-1} & \\ i & \gamma_j \Rightarrow \gamma_{i-1} & \end{array}$$

Demostración de corrección V

es decir, $\gamma_i = \gamma_j \Rightarrow \gamma_{i-1}$.
Este caso difiere del anterior por el uso de una hipótesis. Se puede ver la hipótesis como una premisa adicional y entonces se tiene

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \gamma_j \vdash_N \gamma_{i-1}.$$

Por hipótesis inductiva

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \gamma_j \models \gamma_{i-1}.$$

Ahora bien, la única forma de que el resultado deseado

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \models \gamma_j \Rightarrow \gamma_{i-1}$$

no valiera, sería si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ fueran verdaderas pero $\gamma_j \Rightarrow \gamma_{i-1}$ fuera falsa (por la definición de $\models$).

Demostración de corrección VI

Esto último sólo sería posible si γ_j fuera verdadera y γ_{i-1} fuera falsa (por la tabla de verdad de la $\Rightarrow$), lo cual no es compatible con la hipótesis inductiva, por lo que el resultado vale.

La demostración continúa con los casos correspondientes a las demás reglas (como ejercicios para el lector). □

Completitud de $\vdash_N$

Para demostrar la completitud amplia de $\vdash_N$ se seguirá esta ruta:

1. Se demostrarán varios lemas, entre ellos una versión del teorema de deducción común a otros sistemas de demostración.
2. Se demostrará la completitud simple de $\vdash_N$.
3. La completitud en sentido amplio se obtendrá como un corolario de la completitud simple.

Teoremas de la deducción

Teorema

Teorema de la deducción (versión semántica). $\alpha \models \beta$ *sii* $\models \alpha \Rightarrow \beta$.

Demostración. Se sigue directamente de la definición de $\models$ y la tabla de verdad de la $\Rightarrow$. □

Teorema

Teorema de la deducción (versión sintáctica). $\alpha \vdash_N \beta$ *sii* $\vdash_N \alpha \Rightarrow \beta$.

Demostración. Dada una demostración de $\alpha \vdash_N \beta$, se demuestra $\vdash_N \alpha \Rightarrow \beta$ transformando α de premisa en hipótesis y aplicando la regla de $I \Rightarrow$.
A la inversa, dada una demostración de $\vdash_N \alpha \Rightarrow \beta$ y con α como una premisa adicional, la regla $E \Rightarrow$ nos da una demostración de $\alpha \vdash_N \beta$. □

Lema para completitud I

Lema

Sea α una fórmula y sean $p_1, \ldots, p_n$ las variables proposicionales que aparecen en α. Considérese una evaluación $e : P_0 \to \mathbb{B}$ y constrúyanse las fórmulas $p'_1, \ldots, p'_n$ y α' definidas de la siguiente forma:

$$p'_i = \begin{cases} p_i & \text{si } e(p_i) = V \\ \neg p_i & \text{si } e(p_i) = F \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \alpha' = \begin{cases} \alpha & \text{si } \hat{e}(\alpha) = V \\ \neg\alpha & \text{si } \hat{e}(\alpha) = F \end{cases}$$

Entonces $p'_1, \ldots, p'_n \vdash_N \alpha'$.

Demostración. Por inducción sobre la estructura de α.
Caso básico: $\alpha = p$. Si $e(p) = V$, entonces $p' = p = \alpha = \alpha'$. Entonces tenemos el teorema trivial $p \vdash_N p$.

Lema para completitud II

Si $e(p) = F$, entonces $p' = \neg p = \neg\alpha = \alpha'$. De nuevo, trivialmente $\neg p \vdash_N \neg p$.
Los casos inductivos se pueden reducir a dos: $\alpha = \neg\beta$ y $\alpha = \beta \vee \gamma$ gracias a que las demás conectivas se pueden definir en función de $\neg$ y $\vee$.
Caso $\alpha = \neg\beta$. Sean $p_1, \ldots, p_m$ las proposiciones atómicas que forman β (obsérvese que son las mismas de α) y sea e una evaluación. En este caso, la hipótesis inductiva nos dice que

$$p'_1, \ldots, p'_m \vdash_N \beta'.$$

Y se tienen dos subcasos: $\beta' = \beta$ y $\beta' = \neg\beta$ (dependiendo de si $e(\beta) = V$ o $e(\beta) = F$, respectivamente).
En el primer subcaso, $\alpha' = \neg\alpha = \neg\neg\beta$. Utilizando el teorema $\vdash_N p \Leftrightarrow \neg\neg p$ y la hipótesis inductiva, obtenemos

$$p'_1, \ldots, p'_m \vdash_N \neg\neg\beta = \alpha'.$$

Lema para completitud III

En el segundo subcaso, $\alpha' = \alpha = \beta'$ y el resultado se sigue directamente de la hipótesis inductiva.
Caso $\alpha = \beta \vee \gamma$. Sean $p_1, \ldots, p_m$ y $q_1, \ldots, q_r$ las proposiciones atómicas de β y γ, respectivamente. Sea e una evaluación. Entonces la hipótesis inductiva nos da

$$p'_1, \ldots, p'_m \vdash_N \beta' \qquad \text{y} \qquad q'_1, \ldots, q'_r \vdash_N \gamma'.$$

(Obsérvese que no importa si β y γ comparten proposiciones atómicas, pues como e es una evaluación común, reciben el mismo valor de verdad).
Nuevamente, hay dos subcasos: $e(\alpha) = F$ y $e(\alpha) = V$.
El primer subcaso implica que $e(\beta) = e(\gamma) = F$ (por la tabla de verdad de $\vee$). En este caso,

$$\beta' = \neg\beta \qquad \gamma' = \neg\gamma \qquad \alpha' = \neg\alpha = \neg(\beta \vee \gamma).$$

Lema para completitud IV

La hipótesis inductiva ahora se ve así:

$$p'_1, \ldots, p'_m \vdash_N \neg\beta \qquad \text{y} \qquad q'_1, \ldots, q'_r \vdash_N \neg\gamma.$$

Aplicando la regla $I\wedge$ y el teorema de De Morgan

$$\vdash_N \neg p \wedge \neg q \Leftrightarrow \neg(p \vee q)$$

se puede concluir

$$p'_1, \ldots, p'_m, q'_1, \ldots, q'_r \vdash_N \neg(\beta \vee \gamma) = \alpha'.$$

En el segundo subcaso, $\alpha' = \alpha = \beta \vee \gamma$, lo que implica (por la tabla de verdad de la $\vee$) que $\beta' = \beta$ o $\gamma' = \gamma$ o ambas cosas. En cualquiera de los tres casos, la regla de $I\vee$ nos lleva a la conclusión deseada:

$$p'_1, \ldots, p'_m, q'_1, \ldots, q'_r \vdash_N \beta \vee \gamma = \alpha'. \quad \square$$

Completitud de $\vdash_N$ I

Teorema

Si $\models \alpha$, entonces $\vdash_N \alpha$.

Demostración. Sea $\models \alpha$ y sean $p_1, \ldots p_m$ las proposiciones atómicas que aparecen en α. Sea e una evaluación. Por el lema anterior

$$p'_1, \ldots p'_m \vdash_N \alpha'.$$

Dado que α es una tautología, $\alpha' = \alpha$, sin importar qué asignaciones haga e.
Sea $e(p_1) = V$, por lo que $p'_1 = p_1$. Sea e_1 una evaluación igual a e, salvo que $e_1(p_1) = F$ y, en este caso, $p'_1 = \neg p_1$. Tenemos entonces que

$$\begin{array}{rl} p_1, \ldots p'_m & \vdash_N \alpha \\ \neg p_1, \ldots p'_m & \vdash_N \alpha. \end{array}$$

Completitud de $\vdash_N$ II

Aplicando el teorema de la deducción en cada caso, tenemos

$$\begin{array}{rl} p'_2, \ldots p'_m & \vdash_N p_1 \Rightarrow \alpha \\ p'_2, \ldots p'_m & \vdash_N \neg p_1 \Rightarrow \alpha. \end{array}$$

Con el teorema $\vdash_N (p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow q$ y aplicaciones de las reglas $I\wedge$ y $E \Rightarrow$ se obtiene

$$p'_2, \ldots p'_m \vdash_N \alpha.$$

Repitiendo este proceso $m - 1$ veces se llegará a $\vdash_N \alpha$. □

Corolario de completitud en sentido amplio

Corolario

Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \models \beta$ entonces $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vdash_N \beta$.

Demostración. Obsérvese que si

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \models \beta,$$

el teorema de la deducción (semántico), nos da

$$\models \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \Rightarrow \beta.$$

Completitud simple a su vez nos da

$$\vdash_N \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \Rightarrow \beta.$$

Y gracias al teorema de la deducción sintáctico

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vdash_N \beta. \quad \square$$

Consistencia

Teorema

$\vdash_N$ es consistente, es decir, no existe α tal que $\vdash_N \alpha$ y $\vdash_N \neg\alpha$.

Demostración. Si existiera una α así, podríamos obtener con una aplicación de $I\wedge$ el teorema $\vdash_N \alpha \wedge \neg\alpha$, el cual debería ser una tautología, dado que $\vdash_N$ es correcto. Como esto es imposible, no puede existir esa α. □

Teorema

$\vdash_N$ es decidible, es decir, existe un procedimiento efectivo tal que para toda α, nos responde si $\vdash_N \alpha$.

Demostración. Si $\vdash_N \alpha$ fuera un teorema, por corrección tendríamos que $\models \alpha$. Esto último se puede verificar por medio de una tabla de verdad, cuya construcción es un procedimiento efectivo. □