AUTÓMATAS Y LENGUAJES FORMALES
LENGUAJES REGULARES II
LENGUAJES INDEPENDIENTES DEL CONTEXTO

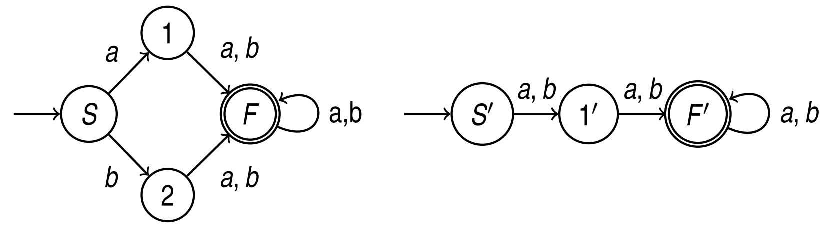
Francisco Hernández Quiroz

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
E-mail: fhq@ciencias.unam.mx
Página Web: www.matematicas.unam.mx/fhq

Posgrado en Ciencia e Ingeniería de la Computación

Minimalización de estados

En ocasiones, un autómata A puede reemplazarse con un autómata A' que reconoce el mismo lenguaje pero que tiene un conjunto de estados menor:



De hecho, para cada lenguaje regular existe un único DFA (salvo isomorfismo) con un número mínimo de estados que lo reconoce.

Autómata cociente

Sea $A \in$ DFA, $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$. Definimos una relación de equivalencia entre estados de Q. Sean $q, r \in Q$. Entonces:

$$q \approx r \qquad \text{sii} \qquad \forall \alpha \,.\, \delta^*(q, \alpha) \in F \text{ sii } \delta^*(r, \alpha) \in F.$$

Dado que $\approx$ es una relación de equivalencia, designaremos con $[q]$ la clase de equivalencia a la que pertenece el estado q. El autómata cociente de A, que denotaremos con $A/\approx = (Q_\approx, \Sigma, \delta_\approx, s_\approx, F_\approx)$, se define así:

$$\begin{aligned} Q_\approx &= \{[q] \mid q \in Q\} \\ \delta_\approx([q], a) &= [\delta(q, a)] \\ s_\approx &= [s] \\ F_\approx &= \{[f] \mid f \in F\}. \end{aligned}$$

Algoritmo de minimalización I

El siguiente algoritmo permite construir el autómata cociente a partir del autómata $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$, con $Q = \{q_1, \ldots, q_k\}$:

1. Se construye una tabla

Estado	q_1	$\ldots$	q_k
q_1	m	$\ldots$	
$\vdots$			
q_k			

   Donde $m = s$ si el estado en el i-ésimo renglón es final y el estado en la j-ésima columna no es final o viceversa. En caso contrario, $m = n$.
2. Se repite lo siguiente hasta que ya no haya cambios:
   Si $(q_i, q_j) = n$ y $(\delta(q_i, a), \delta(q_j, a)) = s$, para algún $a \in \Sigma$, entonces $(q_i, q_j) := s$.
3. Al terminar el paso anterior, $q_i \approx q_j$ sii $(q_i, q_j) = n$.

Algoritmo de minimalización II

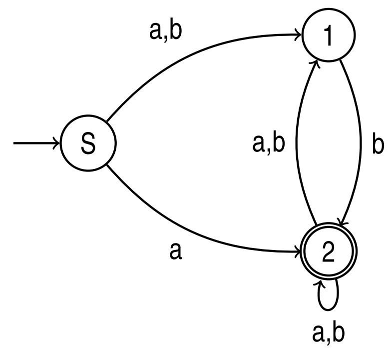
El algoritmo toma cuando mucho

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!}$$

pasos, donde n es el número de estados.

Autómatas no deterministas y disyunción

Considérese el siguiente NFA:



En el estado inicial, la cadena *aa* será aceptada si la cadena *a* lleva a un estado de aceptación a partir del estado 1 o el estado 2. Es decir, si la disyunción $\Delta(1, a) \cap F \vee \Delta(2, a) \cap F$ es verdadera.

Autómatas finitos alternantes (AFA)

- Un autómata alternante generaliza la idea anterior a otras funciones boolenas. Por ejemplo, la aceptación de la cadena *aa* podría ocurrir si la expresión $\Delta(1, a) \cap F \wedge \neg\Delta(2, a) \cap F$ es verdadera.
- En cada estado de un autómata alternante, la lectura de un símbolo lleva a la aplicación de una función booleana a los posibles resultados de procesar el resto de la cadena de entrada.

Definiciones preliminares

Sea Q un conjunto finito de estados. Una evaluación es una función $e : Q \rightarrow \{V, F\}$. Sea $B^Q = \{e : Q \rightarrow \{V, F\}\}$. El conjunto de funciones booleanas con argumentos en Q es $\{b : B^Q \rightarrow \{V, F\}\}$.
Ejemplo. Sea $Q = \{s, 1, 2\}$. Una función booleana es $b = s \wedge (1 \vee 2)$. Sea e la evaluación siguiente

$$e(s) = V \qquad e(1) = F \qquad e(2) = V.$$

Entonces, $b(e) = V$. Si $b' = s \wedge 1$ entonces $b'(e) = F$.
Nota: La función booleana no necesita utilizar todos sus argumentos, como en el ejemplo de b'.

Definición formal

Un autómata alternante es un cuarteto $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$, donde $\delta : Q \times \Sigma \to \{b : B^Q \to \{V, F\}\}$.

La función δ se extiende a $\delta^* : Q \times \Sigma^* \to \{b : B^Q \to \{V, F\}\}$:

$$\begin{aligned} \delta^*(q, \epsilon) &= q \\ \delta^*(q, a\alpha) &= \delta(q, a) \circ (\delta^*(q_1, \alpha), \ldots, \delta^*(q_n, \alpha)) \end{aligned}$$

Sea $f : Q \to \{V, F\}$ la evaluación siguiente:

$$f(q) = V \qquad \text{sii} \qquad q \in F.$$

Entonces

$$L(A) = \{\alpha \mid \delta^*(s, \alpha)(f) = V\}$$

Ejemplo

Sea $A = (\{s, 1, 2\}, \{a, b\}, \delta, s, \{2\})$, donde δ está definida así:

Estado	a	b
s	$1 \vee \neg 2$	$1 \wedge 2$
1	$\neg 2$	1
2	2	$\neg 1 \vee 2$

Entonces

$$\begin{aligned} \delta^*(s, baa)(f) &= \delta^*(1, aa) \wedge \delta^*(2, aa) \\ &= \neg\delta^*(2, a) \wedge \delta^*(2, a) \\ &= \neg\delta^*(2, \epsilon) \wedge \delta^*(2, \epsilon) \\ &= \neg 2 \wedge 2 \end{aligned}$$

y finalmente la cadena es rechazada, pues

$$\neg 2 \wedge 2(f) = F$$

Sistemas de ecuaciones

Una forma concisa de definir AFA es por medio de sistemas de ecuaciones. Sea Γ el alfabeto de entrada. Entonces, las ecuaciones tienen el formato:

$$\begin{aligned} X_1 &= \sum_{a \in \Gamma} a \cdot b_1(X_1, \ldots, X_n) + c_1 \\ &\ldots \\ X_n &= \sum_{a \in \Gamma} a \cdot b_n(X_1, \ldots, X_n) + c_n \end{aligned}$$

donde las b_i son funciones booleanas de n argumentos y las c_i pueden ser ϵ (en caso de que sea un estado final) o 0. Los operadores aritméticos y booleanos se interpretan como en las expresiones regulares o de manera tradicional.

Ejemplo

El AFA del ejemplo anterior quedaría descrito por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} X_0 &= a \cdot (X_1 \vee -X_2) + b \cdot (X_1 \wedge X_2) + 0 \\ X_1 &= a \cdot (-X_2) + b \cdot X_1 + 0 \\ X_2 &= a \cdot X_2 + b \cdot (-X_1 \vee X_2) + \epsilon \end{aligned}$$

Un resultado interesante es que todo sistema de ecuaciones corresponde a un AFA y viceversa. La regularidad de los AFA se deduce de que los sistemas de ecuaciones pueden transformarse en expresiones regulares.

Una aplicación: reconocimiento de cadenas

- Supongamos que se tiene un conjunto de cadenas $X \subseteq \Sigma^*$ y una cadena $\alpha \in \Sigma^*$ y el objetivo es verificar si alguna cadena de X aparece en α, es decir si

$$\exists \beta, \gamma, \eta \in \Sigma^* \,.\, \alpha = \beta\gamma\eta \wedge \gamma \in X.$$

- El algoritmo ingenuo sigue el método de la *ventana corrediza*: para cada cadena en X se recorre α carácter por carácter y se verifica si corresponde al segmento de α que inicia ahí.
- No es difícil ver que este algoritmo es muy ineficiente.
- Hay algoritmos más eficientes que éste, pero requieren ciertas operaciones iniciales también muy costosas.
- Si se realizarán búsquedas frecuentes de cadenas de X en cadenas arbitrarias, el costo se podrá justificar.

Diccionarios

- Sea Σ un alfabeto. Un diccionario es un subconjunto finito de Σ^* que no contiene a ϵ.
- Buscar apariciones de cadenas de un diccionario X en cadenas arbitrarias de Σ^* equivale a reconocer el lenguaje $\Sigma^* X$.
- Sea $\alpha \in \Sigma^*$ una cadena no vacía. Denotaremos con $Pre(\alpha)$ los prefijos de α. Si X es un conjunto de cadenas, $Pre(X)$ es el conjunto de prefijos de las cadenas de X.
- Ejemplo. Si $\alpha = abab$, $Pre(\alpha) = \{\epsilon, a, ab, aba, abab\}$.

Autómata *trie* de un diccionario

Dado un un diccionario X, su autómata *trie* $T(X)$ está formado por

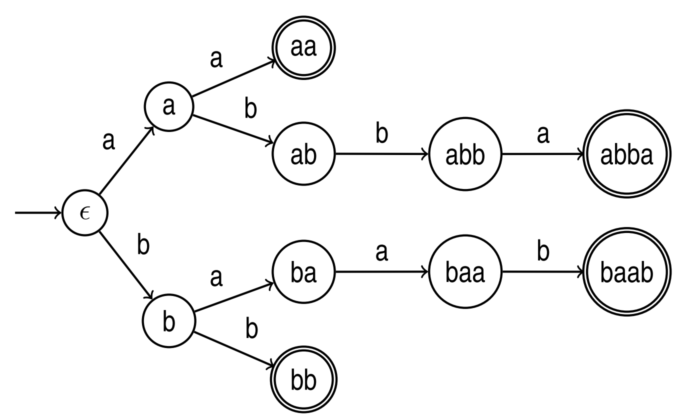
- Un conjunto de estados que comprende un estado por cada prefijo de las cadenas de X (si más de una cadena tienen el mismo prefijo, $T(X)$ sólo incluirá un estado para todas).
- El estado inicial corresponde a ϵ.
- Los estados finales son las cadenas de X.
- La función δ se define así. Sean p y q los estados correspondientes a las prefijos α y β, respectivamente, y sea $a \in \Sigma$. Entonces

$$\delta(p, a) = q \qquad \text{sii} \qquad \beta = \alpha a.$$

.

Ejemplo de autómata *trie*

Considérese el siguiente conjunto de palabras: $\{aa, bb, abba, baab\}$.



Autómata de un diccionario I

- Sea X un diccionario. Con base en $T(X)$ se puede construir el autómata del diccionario X que aceptará el lenguaje $\Sigma^* X$.
- Sea $h : \Sigma^* \times X \to Pre(X)$ la función siguiente

$$h(\alpha, X) = \text{el sufijo de } \alpha \text{ de mayor longitud que pertenece a } Pre(X).$$

- El autómata del diccionario de X, denotado por $D(X)$, constará de los elementos
  - Los mismos estados de $T(X)$.
  - El mismo estado inicial.
  - El conjunto de estados finales es el conjunto de estados que corresponden a las cadenas en $Pre(X) \cap \Sigma^* X$.

Autómata de un diccionario II

- La función δ definida por

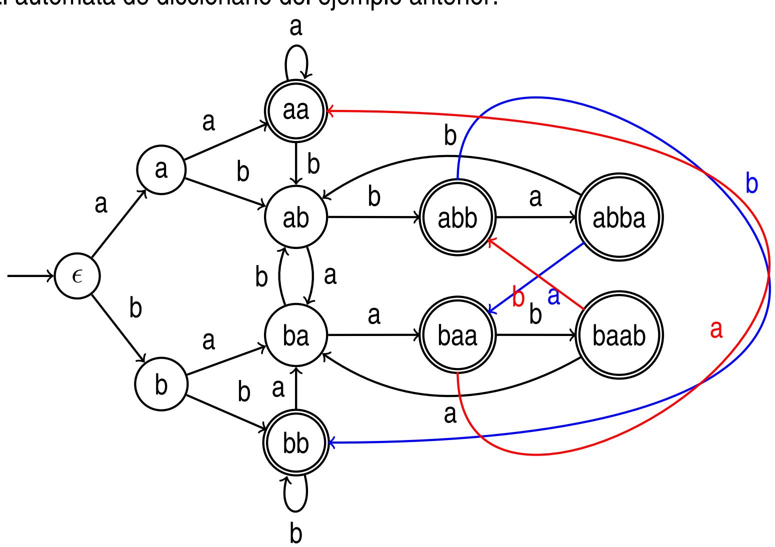
$$\delta(p, a) = q \qquad \text{sii} \qquad \beta = h(\alpha a, X),$$

donde p y q los estados correspondientes a las prefijos α y β, respectivamente, y $a \in \Sigma$.

$D(X)$ es un autómata completo que acepta el lenguaje $\Sigma^* X$.

Ejemplo de autómata de *diccionario*

El autómata de diccionario del ejemplo anterior:



Gramáticas independientes del contexto

- Una gramática $G = \langle \Sigma, \Gamma, S, \to \rangle$ es *independiente del contexto* sii todas las reglas de producción tienen una de las dos siguientes formas

$$A \to \alpha \qquad A \to \epsilon,$$

donde $A \in \Gamma$.

- $\mathtt{CFG}$ designará el conjunto de gramáticas independientes del contexto.
- El lenguaje generado por G se denotará con $L(G)$.
- Un lenguaje L es *independiente del contexto* sii existe una gramática $G \in \mathtt{CFG}$ tal que

$$L = L(G).$$

- $\mathtt{CFL}$ es el conjunto de lenguajes independientes del contexto.

Ejemplos

1. *Lenguaje de palindromas*. Sea $G_P = \langle \{a, b\}, \{S\}, S, \to_P \rangle$, donde

$$S \to_P aSa \mid bSb \mid \epsilon.$$

2. Lenguaje de paréntesis. Sea Sea $G_D = \langle \{(,)\}, \{S\}, S, \to_D \rangle$, con las siguientes reglas

$$S \to_D (S) \mid SS \mid \epsilon.$$

Otras definiciones I

Considérese una derivación

$$\alpha_0 \Rightarrow \alpha_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \alpha_n.$$

Esta derivación presupone reglas de producción

$$A_1 \to \beta_1, \ldots, A_n \to \beta_n$$

tales que

$$\alpha_i = \gamma_i A_i \eta_i \qquad \alpha_{i+1} = \gamma_i \beta_i \eta_i.$$

Esta derivación será *por la izquierda* sii para todo $i \leq n$

$$|\gamma_i| \leq |\gamma_{i+1}| \qquad \gamma_i \in \Sigma^*$$

Otras definiciones II

y será *por la derecha* sii

$$|\eta_i| \leq |\eta_{i+1}| \qquad \eta_i \in \Sigma^*.$$

Una gramática es *no ambigua* sii $\forall \alpha \in L(G)$, α tiene exactamente una derivación por la izquierda (o por la derecha).
Un lenguaje es *no ambiguo* sii existe una gramática no ambigua que lo genere. De lo contrario, será *inherentemente ambiguo*.
Una gramática es *pulcra* sii

(a) $\forall A \in \Gamma \,.\, L(A) \neq \emptyset$;
(b) $\forall A \in \Gamma \,.\, \exists \alpha, \beta \in \Sigma^* \,.\, S \to \alpha A \beta$ o $S = A$.

Otras definiciones III

Una producción es *terminal* sii no contiene símbolos no terminales del lado derecho.
Una producción es una regla-ϵ sii su lado derecho es ϵ.
Una producción es *unitaria* sii es de la forma de la forma $A \to B$, con $A, B \in \Gamma$.
Una gramática es *propia* sii no contiene regla-ϵ ni reglas unitarias.

Paréntesis balanceados

La gramática G_D genera el *lenguaje de paréntesis balanceados*, es decir, $\alpha \in L(G_D)$ sii

1. $A(\alpha) = C(\alpha)$;
2. $C(\beta) \leq A(\beta) \qquad \forall \beta \in Pre(\alpha)$;

donde $A(\alpha)$ y $C(\alpha)$ son el número de paréntesis que abren y cierran que aparecen en α, respectivamente.
Demostración. Por inducción en la derivación de $S \Rightarrow \alpha$.

Lenguajes de Dyck

El lenguaje de paréntesis se puede generalizar a los lenguajes de Dyck. Sea A un alfabeto de símbolos terminales y sea $\bar{A}$ una copia de A, es decir:

(i) $A \cap \bar{A} = \emptyset$

(ii) existe una biyección de A a $\bar{A}$.

Por ejemplo, si $A = \{(\}$, entonces $\bar{A} = \{)\}$.
El lenguaje de Dyck sobre A es el lenguaje generado por las reglas de producción:

$$S \to a_1 S \bar{a}_1 \mid \cdots \mid a_n S \bar{a}_n \mid SS \mid \epsilon,$$

donde $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ y $\bar{a}_i \in \bar{A}$ es la copia de a_i. Este lenguaje se denotará con D_A^*.
Si $|A| = n$, una notación alternativa es D_n^*.

Formas normales de Chomsky y de Greibach

Sea $G = \langle \Sigma, \Gamma, S, \to \rangle$ un gramática. G tiene *forma normal de Chomsky* (CNF) sii todas las producciones tiene la forma

$$A \to BC \qquad\qquad A \to a,$$

donde $A, B, C \in \Gamma$ y $a \in \Sigma$.

En cambio, G tiene *forma normal de Greibach* (GNF) sii todas las producciones tienen la forma

$$A \to bB_1 \cdots B_k$$

con $0 \leq k$, $b \in \Sigma$ y $B_1, \ldots, B_k \in \Gamma$.

Ejemplos

Los conjuntos de producciones siguientes tienen forma normal de Chomsky y de Greibach (respectivamente)

$$\begin{array}{lllll} S & \to & AB \mid AC \mid SS \quad C \to SB \quad A \to (\quad B \to) \\ S & \to & (B \mid (SB \mid (BS \mid (SBS \quad B \to) \end{array}$$

y generan el lenguaje de paréntesis balanceados.

Las producciones siguientes generan el lenguaje de palindromas

$$\begin{array}{lllll} S & \to & AA \mid BB \mid AC \mid BD \quad C \to SA \quad D \to SB \quad A \to a \quad B \to b \\ S & \to & aA \mid aSA \mid bB \mid bSB \quad A \to a \quad B \to b \end{array}$$

Con excepción en ambos casos de ϵ.

Todas las CFG tienen equivalente en CNF o GNF

Teorema. Sea $G \in$ CFG. Entonces existen $G_C, G_G \in$ CFG tales que tienen forma normal de Chomsky y de Greibach, respectivamente, y

$$L(G_C) = L(G_G) = L(G) - \{\epsilon\}.$$

Lema de gramáticas propias I

Sea $G \in$ CFG. Entonces, existe una gramática propia G_P tal que

$$L(G_P) = L(G) - \{\epsilon\}.$$

Demostración. Sea $\to'$ la relación mínima que

(i) contiene a $\to$;
(ii) si $A \to' \alpha B \beta$ y $B \to \epsilon$, entonces $A \to' \alpha\beta$
(iii) si $A \to' B$ y $B \to' \gamma$, entonces $A \to' \gamma$.

Lema de gramáticas propias II

Y sea $G' \in$ CFG como G, pero con las reglas de producción $\to'$. Entonces

$$L(G) = L(G')$$

Obviamente, $L(G) \subseteq L(G')$. Para $L(G') \subseteq L(G)$, baste observar que toda derivación en G' se puede realizar en G, salvo tal vez en más pasos.
Sea ahora G_P como G' pero con la relación $\to''$ que prescinde de las producciones unitarias y -ϵ que existan en $\to'$. Entonces

$$L(G_P) = L(G') - \{\epsilon\} = L(G) - \{\epsilon\}.$$

Esta última afirmación se demuestra considerando que las derivaciones de longitud mínima en G' prescinden de producciones-ϵ y unitarias.

Transformación a forma normal de Chomsky

Una vez que contamos con una gramática propia G_P, podemos construir la FNC:

1. Para cada $a \in \Sigma$, introducimos nuevos no terminales A_a y reglas de producción $A_a \to a$.
2. Sustituimos los terminales por los no terminales del punto anterior en todas las reglas de G_P que no tengan FNC todavía.
3. Dada una regla $A \to B_1 \dots B_k$ $(K > 2)$, introducimos un nuevo terminal C_1 y las reglas

$$A \to B_1 C_1 \qquad C_1 \to B_2 \dots B_k.$$

4. Repetimos este procedimiento hasta tener sólo reglas con dos no terminales del lado derecho.
5. Eliminamos las reglas del punto anterior que no tengan FNC.

Transformación a forma normal de Greibach

Sea G_C una gramática en FNC. Para convertirla a FNG:

1. Para cada $X \in \Gamma$, considérese el lenguaje
$$R_{X,x} = \{\beta \in \Gamma^* \mid X \Rightarrow_L x\beta\}.$$
Este lenguaje es regular. Sea $G_{X,x}$ una gramática lineal por la derecha que lo genere. Sea $S_{X,x}$ el símbolo inicial de esta gramática.
2. Entonces, sustituimos las reglas
$$A \rightarrow XY$$
por reglas
$$A \rightarrow xS_{X,x}Y,$$
y agregamos las producciones y símbolos no terminales de $G_{X,x}$ a nuestra gramática.
3. Eliminamos las reglas-ϵ.

Ejemplos I

Lenguaje de paréntesis. Empezamos con forma normal de Chomsky:

$$S \rightarrow AB \mid AC \mid SS \qquad C \rightarrow SB \qquad A \rightarrow (\qquad B \rightarrow).$$

Tenemos ahora los siguientes lenguajes $R_{X,x}$

$$\begin{array}{rcl} R_{S,(} & = & (B+C)S^* \\ R_{C,(} & = & (B+C)S^*B \\ R_{A,(} & = & \{\epsilon\} \\ R_{B,)} & = & \{\epsilon\} \end{array}$$

Estas producciones nos generan los lenguajes anteriores:

$$\begin{array}{lll} S_{S,(} \rightarrow BX \mid CX & X \rightarrow SX \mid \epsilon & \\ S_{C,(} \rightarrow BY \mid CY & Y \rightarrow SY \mid BZ & Z \rightarrow \epsilon \\ S_{A,(} \rightarrow \epsilon & & \\ S_{B,)} \rightarrow \epsilon & & \end{array}$$

Ejemplos II

Entonces, tenemos las reglas nuevas

$$\begin{array}{lll} S \rightarrow (S_{A,(}B \mid (S_{A,(}C \mid (S_{S,(}S & C \rightarrow (S_{S,(}B & A \rightarrow (\\ S_{S,(} \rightarrow)S_{B,)}X \mid (S_{C,(}X & X \rightarrow (S_{S,(}X \mid \epsilon & B \rightarrow) \\ S_{C,(} \rightarrow)S_{B,)}Y \mid (S_{C,(}Y & Y \rightarrow (S_{S,(}Y \mid)S_{B,)}Z & Z \rightarrow \epsilon \\ S_{A,(} \rightarrow \epsilon & S_{B,)} \rightarrow \epsilon & \end{array}$$

Finalmente, eliminamos reglas-ϵ y símbolos superfluos:

$$\begin{array}{lll} S \rightarrow (B \mid (C \mid (S_{S,(}S & C \rightarrow (S_{S,(}B & A \rightarrow (\\ S_{S,(} \rightarrow)X \mid (S_{C,(}X \mid (S_{C,(} & X \rightarrow (S_{S,(}X \mid (S_{S,(} & B \rightarrow) \\ S_{C,(} \rightarrow)Y \mid (S_{C,(}Y & Y \rightarrow (S_{S,(}Y \mid) & \end{array}$$

Teorema del bombeo I

Sea $L \in$ CFL. Entonces, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para toda $\alpha \in L$, si $k \leq |\alpha|$, entonces

$$\alpha = \beta\gamma\eta\theta\phi, \qquad \gamma\theta \neq \epsilon \qquad \text{y} \qquad |\gamma\eta\theta| \leq k$$

y para toda $i \in \mathbb{N}$
$$\beta\gamma^i\eta\theta^i\phi \in L.$$

Demostración.

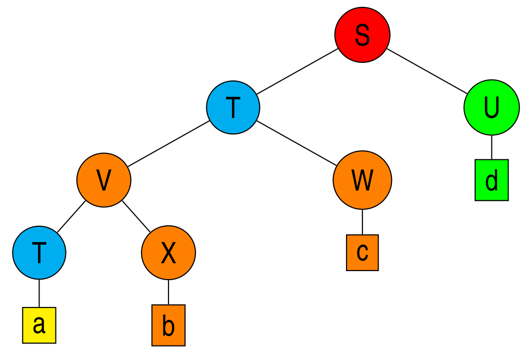
- Sea $G \in$ CFG en FNC y $L(G) = L - \epsilon$.
- Sea Γ el alfabeto de símbolos no terminales de G, con $|\Gamma| = n$ y sea $k = 2^{n+1}$.
- Entonces, el árbol sintáctico de toda cadena de longitud igual o superior a k debe tener profundidad de $n+1$ al menos.

Teorema del bombeo II

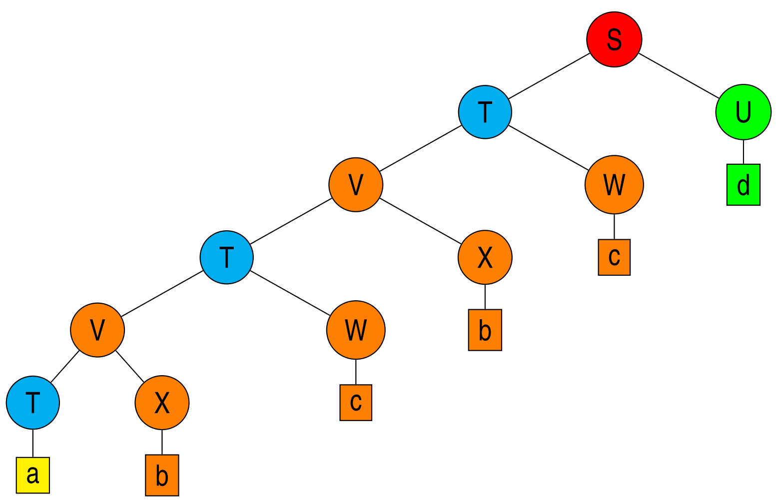
- Entonces en un camino de longitud máxima de la raíz a las hojas debe aparecer dos veces, al menos, el mismo no terminal.
- Este no terminal puede usarse para definir las cadenas γ y θ.

Ejemplo

Considérense los siguientes árboles de derivación:



Árbol de la cadena $\alpha = abcd$



Árbol de la cadena $\beta\gamma^2\eta\theta^2\phi = abcbcd$
con $\beta = a, \gamma = bc, \eta = \theta = \epsilon$ y $\phi = d$

Aplicaciones

Como con los lenguajes regulares, este teorema se puede utilizar para demostrar que un lenguaje dado no es independiente del contexto. Ejemplos:

$$\{a^n b^n c^n\},$$

por una aplicación directa del teorema, y

$$\{\alpha\alpha\}$$

pues los CFL y los regulares son cerrados bajo intersección y

$$\{a^n b^m a^n b^m\} = \{\alpha\alpha\} \cap L(a^* b^* a^* b^*)$$

y, obviamente, $\{a^n b^m a^n b^m\}$ no es independiente del contexto

Autómatas de pila

Un autómata de pila no determinista A está formado por

- un conjunto de estados Q;
- un alfabeto de entrada Σ;
- un alfabeto de pila Γ;
- una relación de transición $\delta \subseteq (Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma) \times (Q \times \Gamma*)$
- un estado inicial s;
- un símbolo inicial de la pila $\perp$;
- un subconjunto de estados finales $F \subseteq Q$.

Llamaremos NPDA a los autómatas de pila no deterministas.

Lenguajes aceptados por NPDA

Una *configuración* de un autómata $A \in$ NPDA es una terna (q, α, β) donde

$$\begin{aligned} q &\in Q \\ \alpha &\in \Sigma^* \\ \beta &\in \Gamma^* \end{aligned}$$

La configuración inicial es $(s, \alpha, \perp)$. Definiremos ahora una relación entre configuraciones:

$$\begin{array}{lll} \text{si } \delta((q,a,B),(r,\eta)) & \text{entonces} & (q, a\alpha, B\beta) \Rightarrow (r, \alpha, \eta\beta) \\ \text{si } \delta((q,\epsilon,B),(r,\eta)) & \text{entonces} & (q, \alpha, B\beta) \Rightarrow (r, \alpha, \eta\beta) \end{array}$$

El lenguaje aceptado por un $A \in$ NPDA es

$$L(A) = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \exists f \in F \,.\, (s, \alpha, \perp) \Rightarrow^* (f, \epsilon, \beta)\}$$

Aceptación por pila vacía

Una definición alternativa del lenguaje aceptado por un $A \in$ NPDA es

$$L(A) = \{\alpha \in \Sigma^* \mid (s, \alpha, \perp) \Rightarrow^* (q, \epsilon, \epsilon)\}$$

Ambas definiciones son equivalentes y puede construirse un $A' \in$ NPDA que acepte por pila vacía el mismo lenguaje que un $A \in$ NPDA que acepte por estado final (y viceversa).

Teorema de equivalencia entre CFG y NPDA I

(a) Sea $G \in$ CFG. Entonces, existe $A \in$ NPDA tal que

$$L(G) = L(A).$$

(b) Sea $A \in$ NPDA. Entonces, existe $G \in$ CFG tal que

$$L(G) = L(A).$$

Demostración
(a) Sea $G = \langle \Sigma, \Gamma, S \rightarrow \rangle$ en FNG. Sea

$$A = (\{q\}, \Sigma, \Gamma, \delta, q, S, q),$$

donde

$$\delta((q,a,A),(q,B_1 \cdots B_k)) \qquad \text{sii} \qquad A \rightarrow aB_1 \cdots B_k.$$

Teorema de equivalencia entre CFG y NPDA II

Si puede demostrar por inducción en la longitud de las derivaciones (por la izquierda) que

$$(q, \alpha\beta, A) \Rightarrow^n_A (q, \beta, \gamma) \qquad \text{sii} \qquad A \Rightarrow^n_G \alpha\gamma.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \alpha \in L(G) \quad & \text{sii} \quad S \Rightarrow^*_G \alpha \\ & \text{sii} \quad (q, \alpha, S) \Rightarrow^*_A (q, \epsilon, \epsilon) \\ & \text{sii} \quad \alpha \in L(A). \end{aligned}$$

(b) Se demuestra primero que para todo $A \in \texttt{NPDA}$ existe un $A' \in \texttt{NPDA}$ con un solo estado tal que

$$L(A) = L(A')$$

y una vez construido A', los argumentos del caso (a) se pueden aplicar en sentido inverso.

Determinismo

- A diferencia de los lenguajes regulares, la clase CFL no determinista es estrictamente mayor que la determinista (DCFL).
- Un autómata determinista de pila $D = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, \perp, \dashv, s, F)$ incluye el símbolo especial $\dashv$ que sirve para indicar el final de la cadena de entrada.
- Las transiciones están indicadas por la función

$$\delta : Q \times \Sigma \cup \{\epsilon, \dashv\} \rightarrow Q \times \Gamma^*.$$

- δ no puede eliminar de la pila a $\perp$, es decir

$$\delta(q, a, \perp) = (r, \alpha\perp).$$

- La aceptación es por estados finales. La aceptación por pila vacía define un conjunto de lenguajes diferente.
- Un ejemplo de un lenguaje en CFL pero no en DCFL es

$$\{a, b\}^* - \{\alpha\alpha \mid \alpha \in \{a, b\}^*\}$$

El teorema de Chomsky y Schützenberger I

Sea $L \in \texttt{CFL}$. Entonces existen $n \in \mathbb{N}$, $R \in \texttt{REG}$ y un homomorfismo h tal que

$$L = h(D^*_n \cap R).$$

Nota: un homomorfismo $h : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$ es una función tal que

$$h(\alpha\beta) = h(\alpha)h(\beta).$$

Demostración. Sea $G = \langle \Sigma, \Gamma, S, \rightarrow\rangle$ en FNC. Asignaremos letras griegas minúsculas a las producciones de G:

$$\pi, \rho, \sigma, \ldots$$

Definiremos nuevas producciones

$$\pi' = \begin{cases} A \rightarrow \overset{1}{\underset{\pi}{[}} B \overset{1}{\underset{\pi}{]}} \overset{2}{\underset{\pi}{[}} C \overset{2}{\underset{\pi}{]}} & \text{si } \pi = A \rightarrow BC \\ A \rightarrow \overset{1}{\underset{\pi}{[}} \overset{1}{\underset{\pi}{]}} \overset{2}{\underset{\pi}{[}} \overset{2}{\underset{\pi}{]}} & \text{si } \pi = A \rightarrow a \end{cases}$$

El teorema de Chomsky y Schützenberger II

y sean

$$\begin{aligned} \Sigma' &= \{\overset{1}{\underset{\pi}{[}}, \overset{1}{\underset{\pi}{]}}, \overset{2}{\underset{\pi}{[}}, \overset{2}{\underset{\pi}{]}} \mid \pi \in \rightarrow\} \\ \rightarrow' &= \{\pi' \mid \pi \in \rightarrow\} \\ G' &= \langle \Sigma', \Gamma, S, \rightarrow' \rangle \end{aligned}$$

Se puede definir fácilmente un isomorfismo con un lenguaje D^*_n (con un par de tipos de paréntesis por cada regla en $\rightarrow$). Obviando el isomorfismo, es claro que

$$L(G') \subseteq D^*_n.$$

$L(G')$ cumple además con las siguientes restricciones adicionales:

1. Para toda $\pi \in \rightarrow$, el símbolo $\overset{1}{\underset{\pi}{]}}$ está seguido de $\overset{2}{\underset{\pi}{[}}$.

El teorema de Chomsky y Schützenberger III

2. Ningún $\overset{2}{\underset{\pi}{]}}$ está seguido de $\overset{n}{\underset{\rho}{[}}$.
3. Si $\pi = A \to BC$ entonces $\overset{1}{\underset{\pi}{[}}$ está seguido de $\overset{1}{\underset{\rho}{[}}$, con $\rho = B \to \beta$. Análogamente para $\overset{2}{\underset{\pi}{[}}$.
4. Si $\pi = A \to a$, entonces $\overset{1}{\underset{\pi}{[}}$ está seguido por la cadena $\overset{1}{\underset{\pi}{]}}\overset{2}{\underset{\pi}{[}}\overset{2}{\underset{\pi}{]}}$.
5. Si $A \Rightarrow^*_{G'} \alpha$, entonces α comienza con $\overset{1}{\underset{\pi}{[}}$ para alguna $\pi = A \to \gamma$.

Considérese el siguiente lenguaje regular:

$$R_A = \{\alpha \in \Sigma'^* \mid \alpha \text{ satisface 1–5}\}$$

Lema. $A \Rightarrow^*_{G'} \alpha$ sii $\alpha \in D^*_n \cap R_A$.
Suponiendo que el lema anterior es verdadero, entonces definimos el homomorfismo

$$h : \Sigma'^* \to \Sigma^*.$$

El teorema de Chomsky y Schützenberger IV

Si $\pi = A \to BC$ entonces

$$h(\overset{1}{\underset{\pi}{[}}) = h(\overset{1}{\underset{\pi}{]}}) = h(\overset{2}{\underset{\pi}{[}}) = h(\overset{2}{\underset{\pi}{]}}) = \epsilon.$$

Si $\pi = A \to a$ entonces

$$h(\overset{1}{\underset{\pi}{[}}) = a \qquad \text{y} \qquad h(\overset{1}{\underset{\pi}{]}}) = h(\overset{2}{\underset{\pi}{[}}) = h(\overset{2}{\underset{\pi}{]}}) = \epsilon.$$

El teorema se sigue directamente de esta definición.

Lema $A \Rightarrow^*_{G'} \alpha$ sii $\alpha \in D^*_n \cap R_A$

Demostración. Por inducción en n para la dirección $\Rightarrow$.
Para el caso inverso, por inducción en la longitud de las cadenas en $D^*_n \cap R_A$. Basta considerar que

$$\alpha = \overset{1}{\underset{\pi}{[}}\,\beta\,\overset{1}{\underset{\pi}{]}}\,\overset{2}{\underset{\pi}{[}}\,\gamma\,\overset{2}{\underset{\pi}{]}}$$

y analizar los dos casos posibles para π, a saber, $A \to BC$ o bien $A \to a$.
En el primer caso, por hipótesis inductiva,

$$B \Rightarrow^*_{G'} \beta \qquad \text{y} \qquad C \Rightarrow^*_{G'} \gamma$$

y además β y γ satisfacen las condiciones 1–5. El segundo caso es aún más simple.

Algoritmo de Cocke, Kasami y Younger

- Es un algoritmo para *decidir* de manera eficiente si una cadena pertenece a un CFL.
- Sea L un CFL y sea $G = \langle \Sigma, \Gamma, S, \to \rangle$ una CFG en forma normal de Chomsky tal que
$$L(G) = L.$$
- Sea $\alpha \in L$ con longitud n. Sean $0 \leq i < j \leq n$ y sea
$$\alpha_{i,j}$$
la subcadena de α que va de la posición $i + 1$ a la j.
- Sea $T_{i,j} \subseteq \Gamma$ el conjunto de no terminales que generaron $\alpha_{i,j}$.
- El algoritmo calcula el valor de todos los $T_{i,j}$ de manera inductiva. En particular, $S \in T_{0,n}$ si $S \Rightarrow^*_G \alpha$.
- El algoritmo es $O(pn^3)$, p el número de producciones en G.

for $i := 0$ **to** $n - 1$ **do**
  $T_{i,i+1} := \emptyset$;
  for $A \to a \in G$ **do**
    if $a = \alpha_{i,i+1}$ **then**
      $T_{i,i+1} := T_{i,i+1} \cup \{A\}$

for $m := 2$ **to** n **do**
  for $i := 0$ **to** $n - m$ **do**
    $T_{i,i+m} := \emptyset$; **for** $j := i + 1$ **to** $i + m - 1$ **do**
      for $A \to BC \in G$ **do**
        if $B \in T_{i,j} \wedge C \in T_{j,i+m}$ **then**
          $T_{i,i+m} := T_{i,i+m} \cup \{A\}$