Juegos en Teoría de Modelos Finitos

Favio Ezequiel Miranda Perea y
Fernando René Martínez Ortiz

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias UNAM
Circuito Exterior, Ciudad Universitaria
04510, México D.F., México
fmiranda@ada.fciencias.unam.mx
fer@valentina.resnet.mtu.edu

Resumen

En teoría de modelos se dice que dos estructuras de un mismo lenguaje de primer orden $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son *elementalmente equivalentes* si y sólo si para cada enunciado φ del lenguaje $\mathfrak{A} \models \varphi \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{B} \models \varphi$.
La noción de *juego de Ehrenfeucht-Fraïssé* proporciona una caracterización simple de equivalencia elemental, la cual es fácil de aplicar para modelos simples, como órdenes lineales. Además, es prácticamente la única herramienta disponible para teoría de modelos finitos, donde los teoremas de Compacidad y Löwenheim- Skolem resultan inútiles. En este artículo presentamos las versiones más simples del juego así como algunas de sus aplicaciones.

1 Preliminares

En esta sección recordamos las nociones preliminares para la comprensión de los resultados principales. Suponemos conocidos los conceptos de signatura y estructura en un lenguaje de primer orden, término y fórmula así como la noción de interpretación de un término t en una estructura $\mathfrak{A}$ según un estado de las variables s, denotada $t^{\mathfrak{A}}[s]$. También debe conocerse la relación de satisfacción $\mathfrak{A} \models \varphi[s]$ entre una estructura $\mathfrak{A}$, una fórmula φ y un estado de las variables s y la relación de verdad $\mathfrak{A} \models \varphi$ entre una estructura $\mathfrak{A}$ y un enunciado φ, para recordar estas nociones el lector puede consultar [1, 4].

Definición 1 Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ dos Σ-estructuras.Un *homomorfismo* de $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$ es una función $F : |\mathfrak{A}| \longrightarrow |\mathfrak{B}|$ que cumple lo siguiente:

- para cada símbolo de constante $c \in \Sigma$, $F(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$,

[0] *Clasificación AMS:* 03C13,03C07,03C15,03C68

◦ para cada símbolo de predicado n-ario $R \in \Sigma$ y cada $(a_1, \ldots, a_n) \in |\mathfrak{A}|^n$, si $R^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)$ entonces $R^{\mathfrak{B}}(F(a_1), \ldots, F(a_n))$ y

◦ para cada símbolo de función n-ario $f \in \Sigma$ y cada $(a_1, \ldots, a_n) \in |\mathfrak{A}|^n$

$$F(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(F(a_1), \ldots, F(a_n)).$$

Si además se cumple que

◦ para cada símbolo de predicado n-ario $R \in \Sigma$ y cada $(a_1, \ldots, a_n) \in |\mathfrak{A}|^n$, si $R^{\mathfrak{B}}(F(a_1), \ldots, F(a_n))$ entonces $R^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)$,

entonces decimos que F es un *homomorfismo fuerte*; un *encaje* es un homomorfismo fuerte e inyectivo; un *isomorfismo* es un encaje suprayectivo.
Con $F : |\mathfrak{A}| \cong |\mathfrak{B}|$ denotamos que F es un isomorfismo de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$. Abusando de la notación a veces escribimos $F : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

Definición 2 Si $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ son Σ-estructuras tales que $|\mathfrak{A}| \subseteq |\mathfrak{B}|$ y la inclusión $i : |\mathfrak{A}| \longrightarrow |\mathfrak{B}|$ es un encaje decimos que $\mathfrak{A}$ es una *subestructura de* $\mathfrak{B}$ y que $\mathfrak{B}$ es una *extensión de* $\mathfrak{A}$.
Si $\mathfrak{A}$ es una estructura y $X \subseteq |\mathfrak{A}|$ entonces la mínima subestructura de $\mathfrak{A}$ cuyo universo incluye a X es la *subestructura de* $\mathfrak{A}$ *generada por* X y se denota con $\langle X \rangle_{\mathfrak{A}}$.

Los siguientes resultados son elementales y no serán demostrados aquí.

Proposición 1 *Sean* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ *dos* Σ*-estructuras y* $F : |\mathfrak{A}| \longrightarrow |\mathfrak{B}|$. *Entonces:*

(a). Si F *es un homomorfismo entonces para cada término* $t(\bar{x})$ *y* $\bar{a} \in |\mathfrak{A}|^n$ *se tiene* $F(t^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]) = t^{\mathfrak{B}}[F(\bar{a})]$ [1].

(b). F *es un homomorfismo si y sólo si para cada fórmula atómica* $\varphi(\bar{x})$ *y cada* $\bar{a} \in |\mathfrak{A}|^n$ *se cumple*

$$\textit{Si } \mathfrak{A} \models \varphi[\bar{a}] \textit{ entonces } \mathfrak{B} \models \varphi[F(\bar{a})].$$

(c). F *es un encaje si y sólo si para cada fórmula atómica* $\varphi(\bar{x})$ *y cada* $\bar{a} \in |\mathfrak{A}|^n$ *se tiene que*

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\bar{a}] \textit{ si y sólo si } \mathfrak{B} \models \varphi[F(\bar{a})].$$

El concepto de isomorfismo es un concepto matemático no-lógico. Dos estructuras isomorfas son totalmente indistinguibles mediante su propia constitución, por ejemplo, la noción de isomorfismo entre dos grupos, según nuestra definición, coincide con la noción usual de isomorfismo de grupos.

Existe otra noción de indistinguibilidad entre estructuras que sí es un concepto lógico.

[1] Con $F(\bar{a})$ denotamos, en adelante, a la n-ada $(F(a_1), \ldots, F(a_n))$.

Definición 3 Dos Σ-estructuras $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ son *elementalmente equivalentes* si validan exactamente a los mismos enunciados, es decir, si para cualquier enunciado φ se tiene que

$$\mathfrak{A} \models \varphi \text{ si y sólo si } \mathfrak{B} \models \varphi.$$

Esta relación la denotamos como $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

Veamos ahora algunos conceptos entre estructuras y signaturas.

Definición 4 Si Σ, Σ' son signaturas tales que $\Sigma' \subseteq \Sigma$ decimos que Σ es una *expansión* de Σ' y que Σ' es un *reducto* de Σ.
Si $\Sigma' \subseteq \Sigma$, $\mathfrak{A}$ es una Σ'-estructura y $\mathfrak{B}$ es una Σ-estructura tales que $|\mathfrak{A}| = |\mathfrak{B}|$ y la interpretación de los símbolos de Σ' coincide en ambas estructuras entonces $\mathfrak{B}$ es una Σ-*expansión* de $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{A}$ es un Σ'-*reducto* de $\mathfrak{B}$.
Si $\mathfrak{A}$ es una Σ-estructura, $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in |\mathfrak{A}|^n$, $\bar{c} = (c_1, \ldots, c_n)$ es una n-ada de símbolos de constante que no figuran en Σ y $\Sigma(\bar{c}) = \Sigma \cup \{c_1, \ldots, c_n\}$ entonces la $\Sigma(\bar{c})$-expansión de $\mathfrak{A}$ tal que $c_i^{\mathfrak{A}} = a_i$ se denota con $\langle \mathfrak{A}, \bar{a} \rangle$.

Los siguientes lemas serán de utilidad.

Lema 1 *Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ Σ-estructuras tales que $\langle \mathfrak{A}, \bar{a} \rangle$, $\langle \mathfrak{B}, \bar{b} \rangle$ son $\Sigma(\bar{c})$-estructuras. Entonces un homomorfismo (encaje) $F : \langle \mathfrak{A}, \bar{a} \rangle \longrightarrow \langle \mathfrak{B}, \bar{b} \rangle$ es lo mismo que un homomorfismo (encaje) $F : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ tal que $F(\bar{a}) = \bar{b}$.*

Lema 2 *(Lema del Diagrama)*
Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ Σ-estructuras y $\langle \mathfrak{A}, \bar{a} \rangle$, $\langle \mathfrak{B}, \bar{b} \rangle$ $\Sigma(\bar{c})$-estructuras. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(a). Para cada $\Sigma(\bar{c})$-enunciado atómico φ, si $\langle \mathfrak{A}, \bar{a} \rangle \models \varphi$ entonces $\langle \mathfrak{B}, \bar{b} \rangle \models \varphi$.

(b). Existe un homomorfismo $F : \langle \bar{a} \rangle_{\mathfrak{A}} \longrightarrow \mathfrak{B}$ tal que $F(\bar{a}) = \bar{b}$.

Si existe el homomorfismo en (b), es único y es un encaje si y sólo si

(c) para cada $\Sigma(\bar{c})$-enunciado atómico,

$$\langle \mathfrak{A}, \bar{a} \rangle \models \varphi \textit{ si y sólo si } \langle \mathfrak{B}, \bar{b} \rangle \models \varphi.$$

2 El Juego

Sean Σ una signatura y $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ dos Σ-estructuras.

Tenemos dos personas llamados $\forall$belardo y $\exists$loísa que se dedican a comparar las dos estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$. $\forall$belardo pretende probar que $\mathfrak{A}$ es diferente de $\mathfrak{B}$, mientras que $\exists$loísa pretende probar que son iguales, de manera que el juego tiene la forma de una conversación del siguiente jaez:

- $\forall$belardo: Mira $\exists$loísa, he encontrado un elemento extraordinario en este modelo, ¡A que tú no puedes hallar uno igual en aquel modelo!

- $\exists$loísa: ¿ Ah, sí ? ¿ Y qué te parece este elemento?

Si $\forall$belardo consigue encontrar una diferencia entre $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ entonces gana el juego; en otro caso $\exists$loísa gana. Formalicemos tal juego.

Reglas del Juego

- Se fija un número $k \in \mathbb{N}$ que será la longitud del juego, es decir, hay solamente k jugadas.
- $\forall$belardo inicia el juego.
- En la i-ésima jugada $\forall$belardo elige una estructura y un elemento de esa estructura.
- Después $\exists$loísa escoge un elemento de la otra estructura.
- No hay más restricciones en la elección de elementos, en particular, cualquier jugador puede elegir un elemento elegido en alguna jugada previa.
- El juego es de información perfecta, es decir, cada jugador conoce todas las jugadas previas del otro.
- Al final se obtienen dos k-adas $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_k)$, $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_k)$, $\bar{a}$ representa a los elementos elegidos de $\mathfrak{A}$ y $\bar{b}$ a los elementos de $\mathfrak{B}$.
- El juego se representa mediante el par $(\bar{a}, \bar{b})$.
- $\exists$loísa gana el juego $(\bar{a}, \bar{b})$ si y sólo si existe un isomorfismo

$$F : \langle \bar{a} \rangle_{\mathfrak{A}} \longrightarrow \langle \bar{b} \rangle_{\mathfrak{B}},$$

  tal que $F(a_i) = b_i$.

Este juego se llama *juego de Ehrenfeucht-Fraïssé* de longitud k para $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, y se denota como $EF_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

Ejemplo 1 Sean $\zeta = \langle \mathbb{Z}, < \rangle$ y $\lambda = \langle \mathbb{R}, < \rangle$. Consideremos el siguiente juego de longitud 3.

	$\forall$be1	$\exists$lo1	$\forall$be2	$\exists$lo2	$\forall$be3	$\exists$lo3
$\mathbb{Z}$		2	0			5
$\mathbb{R}$	e			0	π	

Así el juego $((0,2,5),(0,e,\pi))$ lo gana $\exists$loísa pues definiendo $F(0) = 0$, $F(2) = e$ y $F(5) = \pi$ tenemos un isomorfismo $F : \langle\ 0,2,5\ \rangle_\zeta \longrightarrow \langle\ 0,e,\pi\ \rangle_\lambda$.

Ejemplo 2 Racionales vs. Enteros. Sean $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Q}, +, 0\rangle$ y $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{Z}, +, 0\rangle$. Si la longitud del juego es mayor o igual que dos, es decir, $k \geq 2$, entonces $\forall$belardo gana el juego de la siguiente manera: $\forall$belardo escoge $a_0 \in \mathbb{Q}$, $a_0 \neq 0$. En tal caso $\exists$loísa debe escoger un entero $b_0 \neq 0$ pues si no pierde en la primera jugada. Como existe un entero n tal que n no divide a b_0 entonces $\forall$belardo escoge en la segunda jugada $a_1 \in \mathbb{Q}$ tal que $na_1 = a_0$. Por la elección de n, $\exists$loísa no podrá encontrar $b_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $nb_1 = b_0$ de manera que no podrá haber isomorfismo, así que $\forall$belardo ha ganado el juego.

Tal vez el concepto no lógico de isomorfismo sea más complicado de manejar para decidir el triunfo de $\exists$loísa en algún juego. Pero mediante la proposición 1 podemos cambiar la condición de gane para $\exists$loísa por la siguiente condición lógica equivalente:

- $\exists$loísa gana el juego $(\bar{a}, \bar{b})$ si y sólo si para todo enunciado atómico φ se tiene que
$$\langle \mathfrak{A}, \bar{a}\rangle \models \varphi \text{ si y sólo si } \langle \mathfrak{B}, \bar{b}\rangle \models \varphi.$$
  Esta propiedad se denota con $\langle \mathfrak{A}, \bar{a}\rangle \equiv_0 \langle \mathfrak{B}, \bar{b}\rangle$.

Ejemplo 3 El juego $EF_2(\langle \mathbb{Z}_4, +\rangle, \langle \mathbb{V}, \cdot\rangle)$ entre el grupo de enteros módulo 4 y el grupo de *Klein*, siempre lo gana $\forall$belardo.

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

·	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Una posible estrategia ganadora para $\forall$belardo se obtiene al observar que

$$\langle \mathbb{V}, \cdot\rangle \models \exists y \forall x (f(x,x) = y) \text{ y } \langle \mathbb{Z}_4, +\rangle \not\models \exists y \forall x (f(x,x) = y)$$

Obsérvese que por la finitud de los modelos el cuantificador universal se puede descomponer como conjunción de enunciados atómicos.
Así $\forall$belardo debe elegir $u, v \in \mathbb{Z}_4$ tales que $u+u \neq v+v$. La estrategia es la siguiente:

> En la primera jugada $\forall$belardo elige $0 \in \mathbb{Z}_4$, obligando a $\exists$loísa a elegir $e \in \mathbb{V}$ (en otro caso $\exists$loísa pierde de inmediato); en la segunda jugada $\forall$belardo elige $3 \in \mathbb{Z}_4$ (ó $1 \in \mathbb{Z}_4$). Pero cualquier elección u de $\exists$loísa cumple $u \cdot u = e$ mientras que $3 + 3 = 2 \neq 0$. Así que $\forall$belardo gana el juego.

Ejemplo 4 Sean $\mathbf{6} = \{0,1,2,3,4,5\}$ y $\mathbf{7} = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ y consideremos $\mathfrak{A} = \langle \mathbf{6}, <\rangle$, $\mathfrak{B} = \langle \mathbf{7}, <\rangle$. Veamos que el juego $EF_3(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ es ganado por $\forall$belardo.
Como ambos modelos son finitos, son órdenes lineales y tienen extremos, la única diferencia entre ellos es el número de elementos. Sin embargo $\forall$belardo tiene sólo tres jugadas para hacer patente esta diferencia, así, su estrategia será "partir a la mitad"

los órdenes lineales de manera que pueda reducir su magnitud.
$\forall$belardo empieza eligiendo $3 \in \mathbf{7}$ en cuyo caso $\exists$loísa juega $3 \in \mathbf{6}$ o $2 \in \mathbf{6}$, ya que en otro caso pierde de inmediato, por ejemplo, si eligiera $4 \in \mathbf{6}$ entonces $\forall$belardo elige $6 \in \mathbf{7}$ con lo que obliga a $\exists$loísa a contestar con $5 \in \mathbf{6}$; en la última jugada $\forall$belardo elige $5 \in \mathbf{7}$ y $\exists$loísa no puede elegir un elemento entre el 4 y el 5.
Así que supongamos, sin perder generalidad, que $\exists$loísa elige el $3 \in \mathbf{6}$. $\forall$belardo vuelve a partir a la mitad en el fragmento de los dos órdenes en el que son diferentes, a saber, $\{4,5\} \subset \mathbf{6}$ y $\{4,5,6\} \subset \mathbf{7}$, eligiendo $5 \in \mathbf{7}$. De esta manera, si $\exists$loísa responde $4 \in \mathbf{6}$, $\forall$belardo juega $4 \in \mathbf{7}$ y gana. Análogamente si $\exists$loísa responde con $5 \in \mathbf{6}$ entonces $\forall$belardo juega $6 \in \mathbf{7}$ ganando nuevamente.

Mientras más se parezcan $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ $\exists$loísa tiene más probabilidad de ganar. De hecho, si $\exists$loísa conoce un isomorfismo $F : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ entonces ganará cualquier juego siguiendo la siguiente estrategia:

> Escoger $F(a)$ si $\forall$belardo acaba de escoger $a \in |\mathfrak{A}|$. Escoger $F^{-1}(b)$ si $\forall$belardo acaba de escoger $b \in |\mathfrak{B}|$.

Precisamente la noción más importante en los juegos es la de *estrategia ganadora.* Una *estrategia* para un jugador es una prescripción de cómo jugar, la estrategia es *ganadora* si siempre que un jugador la sigue gana el juego, sin importar cómo juega el contrincante. Por ejemplo la estrategia anterior es ganadora para $\exists$loísa.
El hecho de que $\exists$loísa tenga una estrategia ganadora para $EF_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ lo denotamos con $\exists \mathrm{lo}_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

Veamos algunas propiedades de la estrategia ganadora para $\exists$loísa.

Proposición 2 *Si $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ son Σ-estructuras entonces:*

(a). Si $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ entonces $\exists lo_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ para toda $k \in \mathbb{N}$.

(b). Si $j < k$ y $\exists lo_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ entonces $\exists lo_j(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

(c). Si $\exists lo_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ y $\exists lo_k(\mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ entonces $\exists lo_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{C})$.

Demostración:

(a). La estrategia para $\exists$loísa es la dada arriba.

(b). Supongamos que $j < k$ y que $\exists \mathrm{lo}_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Sea $((a_1, \ldots, a_k), (b_1, \ldots, b_k))$ el juego.
La estrategia ganadora en este caso es jugar exactamente como indica su estrategia ganadora en el juego de longitud k durante los primeros j movimientos. Obsérvese que por hipótesis, dado un $\Sigma(c_1, \ldots, c_k)$-enunciado atómico φ tenemos que $\langle \mathfrak{A}, a_1, \ldots, a_k \rangle \models \varphi$ si y sólo si $\langle \mathfrak{B}, b_1, \ldots, b_k \rangle \models \varphi$ y como un enunciado atómico de la $\Sigma(c_1, \ldots, c_j)$-expansión de $\mathfrak{A}$ es también un enunciado atómico de la $\Sigma(c_1, \ldots, c_k)$-expansión de $\mathfrak{A}$ entonces claramente $\langle \mathfrak{A}, a_1, \ldots, a_j \rangle \models \varphi$ si y sólo si $\langle \mathfrak{B}, b_1, \ldots, b_j \rangle \models \varphi$. Por lo tanto $\exists \mathrm{lo}_j(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

(c). La estrategia ganadora es como sigue: para cada elección $a \in |\mathfrak{A}|$ por parte de $\forall$belardo, obtener primero un $b \in |\mathfrak{B}|$ mediante la estrategia ganadora para $EF_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ y para este elemento obtener $c \in |\mathfrak{C}|$ mediante la estrategia ganadora para $EF_k(\mathfrak{B}, \mathfrak{C})$. Análogamente si $\forall$belardo inicia con un elemento de $\mathfrak{B}$. Así se formaron tres juegos, $(\bar{a}, \bar{b})$ entre $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, $(\bar{b}, \bar{c})$ entre $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{C}$ y el que nos interesa que es $(\bar{a}, \bar{c})$ entre $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{C}$.
Esta estrategia es ganadora puesto que por hipótesis tenemos que $\langle \mathfrak{A}, \bar{a} \rangle \equiv_0 \langle \mathfrak{B}, \bar{b} \rangle$ y $\langle \mathfrak{B}, \bar{b} \rangle \equiv_0 \langle \mathfrak{C}, \bar{c} \rangle$ Así que por transitividad obtenemos que $\langle \mathfrak{A}, \bar{a} \rangle \equiv_0 \langle \mathfrak{C}, \bar{c} \rangle$. Por lo tanto $\exists \mathrm{lo}_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{C})$.

$\dashv$

La primera herramienta importante para modelos finitos la proporciona el siguiente teorema:

Teorema 1 *Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ dos Σ-estructuras tales que $\mathfrak{A}$ tiene k elementos. Entonces,*

(a). Si $\exists lo_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ entonces existe un encaje $F : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$.

(b). Si $\exists lo_{k+1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ entonces $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

Demostración:

(a). Supongamos que $\exists \mathrm{lo}_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Sea $(\bar{a}, \bar{b})$ un juego tal que en $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_k)$, $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$, este juego existe pues $\forall$belardo puede elegir a todos los elementos de $|\mathfrak{A}|$. Como $\exists$loísa gana el juego entonces existe un isomorfismo $F : \langle \bar{a} \rangle_{\mathfrak{A}} \longrightarrow \langle \bar{b} \rangle_{\mathfrak{B}}$, tal que $F(a_i) = b_i$ pero como $\langle \bar{a} \rangle_{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}$ entonces $F : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ resulta ser un encaje.

(b). Como $\exists \mathrm{lo}_{k+1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ entonces por la proposición 2(b) $\exists \mathrm{lo}_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ y por el inciso (a) existe un encaje $F : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$. Basta ver que F es suprayectiva.
Supóngase lo contrario y sea $b \in |\mathfrak{B}|$ tal que $b \notin F(|\mathfrak{A}|)$. Entonces en la $(k+1)$-jugada $\forall$belardo elige tal b y $\exists$loísa tiene que contestar con algún elemento repetido de $|\mathfrak{A}|$, digamos a_i. Pero entonces $\mathfrak{B} \models \neg(c_i = c_{k+1})$ mientras que $\mathfrak{A} \not\models \neg(c_i = c_{k+1})$. Por lo tanto $\exists$loísa no gana este juego lo cual es absurdo.

$\dashv$

3 Sistemas de Ida y Vuelta

Si bien el teorema 1 ya proporciona una herramienta importante podemos extendernos a resultados para modelos numerables, donde el teorema de Löwenheim-Skolem resulta trivial[2], mediante un juego infinito con tantas jugadas como números naturales y las mismas condiciones, tal juego se denota con $EF_\omega(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

[2] Puesto que los modelos que se tratan son a lo más numerables.

Definición 5 Dos Σ-estructuras $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ son *equivalentes de ida y vuelta* si

$$\exists lo_\omega(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}).$$

Directamente resulta complicado decidir si dos estructuras son equivalentes de ida y vuelta, pero afortunadamente contamos con un criterio equivalente y más simple.

Definición 6 Un *sistema de ida y vuelta* de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ es un conjunto I de pares $(\bar{a}, \bar{b})$ tal que:

S1) $I \neq \varnothing$,

S2) si $(\bar{a}, \bar{b}) \in I$ entonces $\bar{a}, \bar{b}$ tienen la misma longitud y $\langle \mathfrak{A}, \bar{a} \rangle \equiv_0 \langle \mathfrak{B}, \bar{b} \rangle$,

S3) (Ida) Para cada par $(\bar{a}, \bar{b}) \in I$ y cada $c \in |\mathfrak{A}|$ existe $d \in |\mathfrak{B}|$ tal que $((\bar{a}, c), (\bar{b}, d)) \in I$, y

S4) (Vuelta) Para cada par $(\bar{a}, \bar{b}) \in I$ y cada $d \in |\mathfrak{B}|$ existe $c \in |\mathfrak{A}|$ tal que $((\bar{a}, c), (\bar{b}, d)) \in I$.

En ocasiones estas condiciones son difíciles de verificar, pero con la condición S2 y la proposición 1(c) si $(\bar{a}, \bar{b}) \in I$ entonces existe un isomorfismo $F : \langle \bar{a} \rangle_{\mathfrak{A}} \cong \langle \bar{b} \rangle_{\mathfrak{B}}$ tal que $F(\bar{a}) = \bar{b}$. Este isomorfismo es único pues $\bar{a}$ genera a $\langle \bar{a} \rangle_{\mathfrak{A}}$. Sea

$$I^\star = \{F : \langle \bar{a} \rangle_{\mathfrak{A}} \cong \langle \bar{b} \rangle_{\mathfrak{B}} \mid \; F(\bar{a}) = \bar{b} \text{ y } (\bar{a}, \bar{b}) \in I\},$$

mediante las condiciones S1-S4,obtenemos las siguientes condiciones equivalentes para $J = I^\star$:

S1') $J \neq \varnothing$,

S2') si $F \in J$ entonces F es un isomorfismo de alguna subestructura de $\mathfrak{A}$ finitamente generada en una subestructura de $\mathfrak{B}$ finitamente generada,

S3') (Ida). Para cada $F \in J$ y $c \in |\mathfrak{A}|$ existe una extensión G de F tal que $G \in J$ y $c \in dom(G)$, y

S4') (Vuelta). Para cada $F \in J$ y $d \in |\mathfrak{B}|$ existe una extensión G de F tal que $G \in J$ y $d \in Im(G)$.

Inversamente si J es un conjunto que cumple S1'-S4' entonces existe un sistema de ida y vuelta I tal que $J = I^\star$. A saber,

$$I = \{(\bar{a}, \bar{b}) \mid \; \bar{a} \in |\mathfrak{A}|^n, \; \bar{b} \in |\mathfrak{B}|^n \text{ y } F : \langle \bar{a} \rangle_{\mathfrak{A}} \cong \langle \bar{b} \rangle_{\mathfrak{B}} \in J\}.$$

El siguiente teorema da la equivalencia anunciada.

Teorema 2 *Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ Σ-estructuras. Entonces $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son equivalentes de ida y vuelta si y sólo si hay un sistema de ida y vuelta de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$.*

Demostración:
$\Rightarrow$) Sean σ una estrategia ganadora para $\exists$loísa en el juego $EF_\omega(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ e

$$I = \{(\bar{c}\restriction_n, \bar{d}\restriction_n) \mid\ n \in \mathbb{N},\ (\bar{c}, \bar{d}) \text{ es un juego en el que } \exists\text{loisa usa } \sigma\}.$$

Vamos a demostrar que I es un sistema de ida y vuelta.

S1) Se cumple pues para $n = 0$ se tiene que $(\bar{c}\restriction_n, \bar{d}\restriction_n) = (\ (),\ ()\ ) \in I$

S2) Es claro que si $(\bar{a}, \bar{b}) \in I$ entonces $\bar{a}, \bar{b}$ tienen la misma longitud; además se cumple $\langle \mathfrak{A}, \bar{a}\rangle \equiv_0 \langle \mathfrak{B}, \bar{b}\rangle$ pues σ es una estrategia ganadora.

S3) Sean $(\bar{a}, \bar{b}) \in I$ y $c \in |\mathfrak{A}|$. Podemos suponer que $\forall$belardo juega c, así, mediante σ $\exists$loísa obtiene $d \in |\mathfrak{B}|$ y es claro que $((\bar{a}, c), (\bar{b}, d)) \in I$.

S4) Es análogo a S3.

$\Leftarrow$) Sea I un sistema de ida y vuelta de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$. Mediante el axioma de elección tomamos un buen orden $\prec$ para $I^\star$. Considérese la siguiente estrategia σ para $\exists$loísa en el juego $EF_\omega(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$

> Si el juego hasta la n-ésima jugada es $(\bar{a}, \bar{b})$ y $\forall$belardo escogió $c \in |\mathfrak{A}|$, hallar el $\prec$-mínimo $F \in I^\star$ tal que $a_0, \ldots, a_{n-1}, c \in dom(F)$ y $F(\bar{a}) = \bar{b}$ y elegir $d = F(c)$. Análogamente, si $\forall$belardo escogió $d \in |\mathfrak{B}|$ hallar el $\prec$-mínimo $F \in I^\star$ tal que $b_0, \ldots, b_{n-1}, d \in im(F)$ y $F(\bar{a}) = \bar{b}$ y elegir $c = F^{-1}(d)$.
> Si no hay tal F elegir un elemento cualquiera de la estructura correspondiente.

Por las condiciones S1'-S4', si $\exists$loísa sigue la estrategia σ siempre habrá tal $F \in I^\star$. Supongamos ahora que $(\bar{a}, \bar{b})$ es el juego infinito, entonces por S2' y la proposición 1(c) podemos concluir que $\langle \mathfrak{A}, \bar{a}\rangle \equiv_0 \langle \mathfrak{B}, \bar{b}\rangle$. Es decir, $\exists\mathrm{lo}_\omega(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. $\dashv$

Si dos modelos son equivalentes de ida y vuelta son difíciles de distinguir, de hecho en el caso numerable, tales modelos son isomorfos, como lo asegura el siguiente teorema.

Teorema 3 *Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ dos Σ-estructuras.*

(a). Si $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ entonces $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son equivalentes de ida y vuelta.

(b). Supóngase que $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ son a lo más numerables. Si $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son equivalentes de ida y vuelta entonces $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

Demostración:

(a). Esto se prueba de la misma manera que la proposición 2(a).

(b). Supongamos que $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ son a lo más numerables. Como la longitud del juego $EF_\omega(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ es infinita entonces ∀belardo puede elegir todos los elementos de $|\mathfrak{A}|$ y de $|\mathfrak{B}|$. Sea $(\bar{a}, \bar{b})$ el juego resultante. Como ∃loísa gana entonces tenemos $\langle \mathfrak{A}, \bar{a} \rangle \equiv_0 \langle \mathfrak{B}, \bar{b} \rangle$. Pero esto equivale, mediante el lema del diagrama (lema 2), a que exista un isomorfismo $F : \langle \bar{a} \rangle_{\mathfrak{A}} \cong \langle \bar{b} \rangle_{\mathfrak{B}}$. Finalmente como $\langle \bar{a} \rangle_{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}$ y $\langle \bar{b} \rangle_{\mathfrak{B}} = \mathfrak{B}$ entonces $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

$\dashv$

Con esta herramienta podemos probar el siguiente teorema de Cantor.

Teorema 4 *(Cantor)*
Cualesquiera dos órdenes lineales, densos, sin extremos y numerables son isomorfos.

Demostración:
Sean $\langle \mathfrak{A}, <_{\mathfrak{A}} \rangle$, $\langle \mathfrak{B}, <_{\mathfrak{B}} \rangle$ dos órdenes con tales propiedades. Vamos a construir un sistema de ida y vuelta de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$.
Sea I el conjunto de todas las parejas $(\bar{a}, \bar{b})$ tales que existe una $n \in \mathbb{N}$ tal que $(\bar{a}, \bar{b}) \in |\mathfrak{A}|^n \times |\mathfrak{B}|^n$ y para toda $i < j < n$ se tiene que $a_i <_{\mathfrak{A}} a_j$ si y sólo si $b_i <_{\mathfrak{B}} b_j$ y $a_i >_{\mathfrak{A}} a_j$ si y sólo si $b_i >_{\mathfrak{B}} b_j$.
Claramente I es no vacío. Además si $(\bar{a}, \bar{b}) \in I$ entonces $\langle \mathfrak{A}, \bar{a} \rangle \equiv_0 \langle \mathfrak{B}, \bar{b} \rangle$ puesto que los enunciados atómicos son todos de la forma $P(c_i, c_j)$ con $P^{\mathfrak{A}} = <_{\mathfrak{A}}, P^{\mathfrak{B}} = <_{\mathfrak{B}}, c_i^{\mathfrak{A}} = a_i$ y $c_i^{\mathfrak{B}} = b_i$, de manera que se cumplen en $\mathfrak{A}$ si y sólo si se cumplen en $\mathfrak{B}$. Por último, las propiedades de ida y vuelta se cumplen pues no hay extremos en las estructuras y los órdenes son densos. De manera que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son equivalentes de ida y vuelta y como son numerables entonces el teorema 3(b) permite concluir que $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$. $\dashv$

4 El Juego para la Equivalencia Elemental

A partir del juego $EF_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ vamos a construir un juego similar que resulta ser una poderosa herramienta en la teoría de modelos de primer orden.

Definición 7 Una *fórmula atómica aplanada* es una fórmula atómica de alguna de las siguientes formas:

- $x = y$;
- $c = y$, para algún símbolo de constante $c \in \Sigma$;
- $f(x_1, \ldots, x_n) = y$, para algún símbolo de función $f \in \Sigma$;
- $R(x_1, \ldots, x_n)$, para algún símbolo de predicado $R \in \Sigma$.

Definición 8 Una *fórmula aplanada* ϑ es una fórmula tal que todas sus subfórmulas atómicas son aplanadas.

Lema 3 *Cualquier fórmula* φ *es lógicamente equivalente a una fórmula aplanada* ϑ.

Demostración:
basta sustituir fórmulas atómicas de la siguiente manera hasta que la fórmula quede totalmente aplanada. $t_1, \ldots, t_n$ denotan términos compuestos y las variables $x_1, \ldots, x_n$ no figuran antes en la fórmula:

> $t_1 = t_2$ se sustituye con
> $$\forall x_1(t_1 = x_1 \to t_2 = x_1).$$
>
> $f(t_1, \ldots, t_n) = y$ se sustituye con
> $$\forall x_1 \ldots \forall x_n(t_1 = x_1 \wedge \ldots \wedge t_n = x_n \to f(x_1, \ldots, x_n) = y).$$
>
> $R(t_1, \ldots, t_n)$ se sustituye con
> $$\forall x_1 \ldots \forall x_n(t_1 = x_1 \wedge \ldots \wedge t_n = x_n \to R(x_1, \ldots, x_n)).$$

$\dashv$

Ejemplo 5 La fórmula $f(g(x), z) = c$ es equivalente a

$$\forall x_1(f(g(x), z) = x_1 \to c = x_1)$$

que equivale a la fórmula aplanada

$$\forall x_1(\forall x_2(g(x) = x_2 \to f(x_2, z) = x_1) \to c = x_1).$$

La fórmula $h(a) \neq u \wedge R(a, b)$ es equivalente a

$$\neg(\forall x_1(a = x_1 \to h(x_1) = u)) \wedge \forall x_2 \forall x_3(a = x_2 \wedge b = x_3 \to R(x_1, x_2))$$

Es posible simplificar estas fórmulas por medio de equivalencias conocidas y prenexando cuantificadores pero esto no nos concierne.

El juego que vamos a considerar ahora se llama juego aplanado de Ehrenfeucht-Fraïssé, denotado $EF_k[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ y se juega de la misma manera que $EF_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ excepto que se gana de la siguiente forma:

> $\exists$loísa gana el juego $(\bar{a}, \bar{b})$ si y sólo si para cada fórmula atómica aplanada φ, se tiene que
> $$\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a}) \text{ si y sólo si } \mathfrak{B} \models \varphi(\bar{b}).$$

Si la signatura no tiene símbolos de constante ni de función, como en el caso de órdenes lineales, entonces toda atómica es aplanada y $EF_k[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] = EF_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

El hecho de que $\exists$loísa tenga una estrategia ganadora para el juego de longitud k se denota $\exists \mathrm{lo}_k[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$.

Definición 9 Sea φ una fórmula. Definimos el *rango de cuantificación* de φ, denotado $rc(\varphi)$, recursivamente como sigue:

- $rc(\varphi) = 0$ si φ es atómica;
- $rc(\neg\varphi) = rc(\varphi)$;
- $rc(\varphi \wedge \psi) = max\{rc(\varphi), rc(\psi)\}$;
- $rc(\forall x\varphi) = rc(\varphi) + 1$

$rc(\varphi)$ mide el anidamiento de cuantificadores en φ.

Lema 4 *Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ dos Σ-estructuras, $n, k \in \mathbb{N}$, $\bar{a} \in |\mathfrak{A}|^n, \bar{b} \in |\mathfrak{B}|^n$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a). $\exists lo_{k+1}[\langle\mathfrak{A}, \bar{a}\rangle, \langle\mathfrak{B}, \bar{b}\rangle]$.

(b).
- *(Ida). Para cada $c \in |\mathfrak{A}|$ existe $d \in |\mathfrak{B}|$ tal que*
$$\exists lo_k[\langle\mathfrak{A}, \bar{a}, c\rangle, \langle\mathfrak{B}, \bar{b}, d\rangle].$$
- *(Vuelta). Para cada $d \in |\mathfrak{B}|$ existe $c \in |\mathfrak{A}|$ tal que*
$$\exists lo_k[\langle\mathfrak{A}, \bar{a}, c\rangle, \langle\mathfrak{B}, \bar{b}, d\rangle].$$

Demostración:
$\Rightarrow$) Vamos a probar sólo la condición (Ida) de (b) pues la otra es análoga.
Sea $c \in |\mathfrak{A}|$, $\exists$loísa puede considerar a c como la primera jugada de $\forall$belardo en el juego $EF_{k+1}[\langle\mathfrak{A}, \bar{a}\rangle, \langle\mathfrak{B}, \bar{b}\rangle]$, entonces mediante la estrategia σ, $\exists$loísa elige $d \in |\mathfrak{B}|$. Afirmamos que $\exists lo_k[\langle\mathfrak{A}, \bar{a}, c\rangle, \langle\mathfrak{B}, \bar{b}, d\rangle]$.
La estrategia ganadora en este caso es la misma σ considerando a las k jugadas de $EF_k[\langle\mathfrak{A}, \bar{a}, c\rangle, \langle\mathfrak{B}, \bar{b}, d\rangle]$ como las últimas k jugadas de $EF_{k+1}[\langle\mathfrak{A}, \bar{a}\rangle, \langle\mathfrak{B}, \bar{b}\rangle]$ y la primera jugada es (c, d). Sean $(\bar{p}, \bar{q})$ las últimas k jugadas entonces el juego completo es $((c, \bar{p}), (d, \bar{q}))$. Como $\exists$loísa gana $EF_{k+1}[\langle\mathfrak{A}, \bar{a}\rangle, \langle\mathfrak{B}, \bar{b}\rangle]$ entonces se tiene que para toda atómica aplanada:

$$\langle\mathfrak{A}, \bar{a}\rangle \models \varphi(c, \bar{p}) \text{ si y sólo si } \langle\mathfrak{B}, \bar{b}\rangle \models \varphi(c, \bar{q})$$

lo cual es equivalente a:

$$\langle\mathfrak{A}, \bar{a}, c\rangle \models \varphi(\bar{p}) \text{ si y sólo si } \langle\mathfrak{B}, \bar{b}, d\rangle \models \varphi(\bar{q})$$

Por lo tanto $\exists lo_k[\langle\mathfrak{A}, \bar{a}, c\rangle, \langle\mathfrak{B}, \bar{b}, d\rangle]$.
$\Leftarrow$) La estrategia para que $\exists$loísa gane el juego $EF_{k+1}[\langle\mathfrak{A}, \bar{a}\rangle, \langle\mathfrak{B}, \bar{b}\rangle]$ es la siguiente:

> Si $\forall$belardo elige $c \in |\mathfrak{A}|$ entonces $\exists$loísa escoge el d dado por la condición (Ida) y sigue la estrategia para $EF_k[\langle\mathfrak{A}, \bar{a}, c\rangle, \langle\mathfrak{B}, \bar{b}, d\rangle]$. Análogamente si elige $d \in |\mathfrak{B}|$ usando la condición (Vuelta).

$\dashv$

A continuación obtenemos el teorema principal que da como resultado la caracterización de equivalencia elemental mediante el juego de Ehrenfeucht-Fraïssé.

Teorema 5 *(Fraïssé-Hintikka)*
Sea Σ una signatura finita. Para cualesquiera $k, n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar un conjunto finito $\Lambda_{n,k}$ de fórmulas aplanadas $\varphi(x_0, \ldots, x_{n-1})$ con $rc(\varphi) \leq k$ y tales que:

(a). Si $\mathfrak{A}$ es una Σ-estructura y $\bar{a} = (a_0, \ldots, a_{n-1}) \in |\mathfrak{A}|^n$ entonces existe una única fórmula $\varphi \in \Lambda_{n,k}$ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a})$.

(b). Si $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ son Σ-estructuras, $\bar{a} \in |\mathfrak{A}|^n, \bar{b} \in |\mathfrak{B}|^n$ entonces $\exists lo_k[\langle \mathfrak{A}, \bar{a}\rangle, \langle \mathfrak{B}, \bar{b}\rangle]$ si y sólo si existe $\varphi \in \Lambda_{n,k}$ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a})$ y $\mathfrak{B} \models \varphi(\bar{b})$.

Demostración:
Primero vamos a definir los conjuntos $\Lambda_{n,k}$ para toda n, por inducción sobre k. Recordemos que ${}^m 2$ es el conjunto de funciones $s : \{0, \ldots, m-1\} \longrightarrow \{0, 1\}$; además usamos la notación $\phi^0 := \neg\phi$ y $\phi^1 := \phi$.
Como las fórmulas de $\Lambda_{n,k}$ sólo pueden tener libres a las variables $x_0, \ldots, x_{n-1}$ y la signatura es finita entonces sólo hay un número finito de fórmulas atómicas aplanadas con tales variables libres, digamos que son $\phi_0, \ldots, \phi_{m-1}$. Definimos

$$\Lambda_{n,0} = \{\phi_0^{s(0)} \wedge \ldots \wedge \phi_{m-1}^{s(m-1)} \mid s \in {}^m 2\}.$$

Supongamos definido $\Lambda_{n+1,k} = \{\chi_0(x_0, \ldots, x_n), \ldots, \chi_{j-1}(x_0, \ldots, x_n)\}$. Sea $X \in \mathcal{P}(j)$ es decir, $X \subseteq j$. Hacemos

$$\vartheta_X = \bigwedge_{i \in X} \exists x_n \chi_i(x_0, \ldots, x_n) \wedge \forall x_n \bigvee_{i \in X} \chi_i(x_0, \ldots, x_n)$$

entonces definimos

$$\Lambda_{n,k+1} = \{\vartheta_X \mid X \in \mathcal{P}(j), \chi_i \in \Lambda_{n+1,k}\}$$

Es claro, por su definición, que los conjuntos $\Lambda_{n.k}$ constan de fórmulas de rango de cuantificación a lo más k.
Ahora iniciamos la demostración:

(a). Por inducción sobre k.
Para $k = 0$. Sea $s \in^m 2$ tal que

$$s(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathfrak{A} \models \phi_i(\bar{a}) \\ \\ 0 & \text{si } \mathfrak{A} \not\models \phi_i(\bar{a}) \end{cases}$$

Sea $\varphi = \phi_0^{s(0)} \wedge \ldots \wedge \phi_{m-1}^{s(m-1)} \in \Lambda_{n,0}$. Por construcción es claro que $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a})$ y que φ es única.

Sea $c \in |\mathfrak{A}|$. Por hipótesis de inducción sabemos que existe una única fórmula $\chi_i \in \Lambda_{n+1,k}$ tal que $\mathfrak{A} \models \chi_i(\bar{a}, c)$, y como c fue arbitraria, esto implica que $\mathfrak{A} \models \forall x_n \chi_i(\bar{a})$ y por lo tanto también $\mathfrak{A} \models \exists x_n \chi_i(\bar{a})$. Así que $\mathfrak{A} \models (\exists x_n \chi_i \wedge \forall x_n \chi_i)(\bar{a})$. Pero esta fórmula es ϑ_X para $X = \{i\}$. En conclusión tenemos que $\mathfrak{A} \models \vartheta_X(\bar{a})$ y $\vartheta_X \in \Lambda_{n,k+1}$. Nuevamente la unicidad es clara.

(b). Por inducción sobre k.
Para $k = 0$.
$\Rightarrow$) Sea φ la fórmula construida en (a) para el caso $k = 0$, entonces $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a})$ y como por hipótesis, para cualquier atómica aplanada ϕ, $\mathfrak{A} \models \phi(\bar{a})$ si y sólo si $\mathfrak{B} \models \phi(\bar{b})$ entonces claramente $\mathfrak{B} \models \varphi(\bar{b})$.
$\Leftarrow$) Es claro porque si $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a})$ y $\mathfrak{B} \models \varphi(\bar{b})$ para $\varphi \in \Lambda_{n,0}$ entonces φ se compone de las atómicas aplanadas y por lo tanto para toda atómica aplanada se tiene $\mathfrak{A} \models \phi(\bar{a})$ si y sólo si $\mathfrak{B} \models \phi(\bar{b})$. Por lo tanto $\exists \mathrm{lo}_0[\langle \mathfrak{A}, \bar{a}\rangle, \langle \mathfrak{B}, \bar{b}\rangle]$.
Ahora sea

$$X = \{i < j \mid \text{ existe } c \in |\mathfrak{A}| \text{ con } \mathfrak{A} \models \chi_i(\bar{a}, c) \text{ para alguna } \chi_i \in \Lambda_{n+1,k}\},$$

entonces $\vartheta_X \in \Lambda_{n,k+1}$ y afirmamos que $\mathfrak{A} \models \vartheta_X(\bar{a})$.
Por la elección de X tenemos que si $i \in X$ entonces $\mathfrak{A} \models \exists x_n \chi_i(\bar{a})$, por lo que $\mathfrak{A} \models (\bigwedge_{i \in X} \exists x_n \chi_i)(\bar{a})$. Ahora por el inciso (a) del teorema para toda $c \in |\mathfrak{A}|$ existe $i \in X$ tal que $\mathfrak{A} \models \chi_i(\bar{a}, c)$. Por lo tanto $\mathfrak{A} \models (\forall x_n \bigvee_{i \in X} \chi_i)(\bar{a})$. En conclusión, $\mathfrak{A} \models \vartheta_X(\bar{a})$.
Ahora tenemos la siguiente serie de equivalencias:
$\exists \mathrm{lo}_{k+1}[\langle \mathfrak{A}, \bar{a}\rangle, \langle \mathfrak{B}, \bar{b}\rangle]$ si y sólo si se cumplen las condiciones de ida y vuelta del lema 4.
Ahora por hipótesis de inducción la condición de (Ida) se cumple si y sólo si para toda $c \in |\mathfrak{A}|$ existe $d \in |\mathfrak{B}|$ tal que existe $\vartheta \in \Lambda_{n+1,k}$ con $\mathfrak{A} \models \vartheta(\bar{a}, c)$ y $\mathfrak{A} \models \vartheta(\bar{b}, d)$.
Lo último sucede si y sólo si, por definición de $\Lambda_{n+1,k}$, para toda $c \in |\mathfrak{A}|$ existe $d \in |\mathfrak{B}|$ tal que existe $\mathfrak{A} \models \chi_i(\bar{a}, c)$ y $\mathfrak{B} \models \chi_i(\bar{b}, d)$.
Finalmente por definición de X la condición (Ida) original equivale a:

I. Para toda $i \in X$ existe $d \in |\mathfrak{B}|$ tal que $\mathfrak{B} \models \chi_i(\bar{b}, d)$.

Procediendo analogamente concluimos que la condición (Vuelta) original equivale a

II. Para toda $d \in |\mathfrak{B}|$ existe $i \in I$ tal que $\mathfrak{B} \models \chi_i(\bar{b}, d)$

Por último I implica que $\mathfrak{B} \models (\bigwedge_{i \in X} \exists x_n \chi_i)(\bar{b})$, mientras que II implica que $\mathfrak{B} \models (\forall x_n \bigvee_{i \in X} \chi_i)(\bar{b})$.
En conclusión $\mathfrak{B} \models \vartheta_X(\bar{b})$ y la prueba está terminada.

$\dashv$

La relación con la equivalencia elemental es la siguiente.

Corolario 1 *Sean Σ una signatura finita y $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ dos Σ-estructuras. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a). $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

(b). Para toda $k \in \mathbb{N}$, $\exists lo_k[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$.

Demostración:
$(a) \Rightarrow (b)$. Supongamos que $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ y sea $k \in \mathbb{N}$. Por (a) del teorema tenemos que existe $\varphi \in \Lambda_{0,k}$ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi$ y utilizando la hipótesis también tenemos que $\mathfrak{B} \models \varphi$. Ahora utilizando la parte (b) del teorema concluimos que $\exists \mathrm{lo}_k[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$.

$(b) \Rightarrow (a)$. Sea ϑ un enunciado, por el lema 3 existe una fórmula aplanada ϕ tal que $\vartheta \equiv \phi$. Es claro que existe k tal que $rc(\phi) \leq k$ y por hipótesis $\mathfrak{A} \models \phi$ si y sólo si $\mathfrak{B} \models \phi$. Así que, como $\vartheta \equiv \phi$ entonces $\mathfrak{A} \models \vartheta$ si y sólo si $\mathfrak{B} \models \vartheta$. Por lo tanto $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.
$\dashv$

Veamos una aplicación en teoría de grupos.

Teorema 6 *Sean* G_1, G_2, H *grupos tales que* $G_1 \equiv G_2$. *Entonces* $G_1 \times H \equiv G_2 \times H$.

Demostración:
Sabemos que $EF_k[G_1, G_2]$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Basta ver que para toda $k \in \mathbb{N}$, $EF_k[G_1 \times H, G_2 \times H]$. $\exists$loísa ganará utilizando como juego auxiliar a $EF_k[G_1, G_2]$ y a su estrategia ganadora para este juego. Se procede como sigue: Si $\forall$belardo escogió $a \in G_1 \times H$ entonces $\exists$loísa descompone a como $a = g \cdot h$ con $g \in G_1, h \in H$. Después usando su estrategia ganadora $\exists$loísa elige un elemento $g' \in G_2$ que corresponda a g. El elemento que responde a la jugada de $\forall$belardo será entonces $b = g' \cdot h$. Si $\forall$belardo escogió un elemento de $G_2 \times H$ el proceso es análogo. El juego es

$$(g_1 \cdot h_1, \ldots, g_k \cdot h_k \ ; \ g'_1 \cdot h_1, \ldots, g'_k \cdot h_k)$$

y además $\exists$loísa ganó el juego $(g_1, \ldots, g_k \ ; \ g'_1, \ldots, g'_k)$.

Veamos ahora cuáles son las fórmulas atómicas aplanadas.

- $x = y$
- $e = y$
- $x \cdot y = z$
- $f(x) = y$

y como $\exists$loísa ganó el juego $EF_k[G_1, G_2]$ entonces tenemos que, para $i, j \leq k$

$$\begin{array}{rcl}
g_i = g_j & \text{si y sólo si} & g'_i = g'_j \\
e = g_i & \text{si y sólo si} & e = g'_i \\
g_i \cdot g_j = g_l & \text{si y sólo si} & g'_i \cdot g'_j = g'_l \\
f(g_i) = g_j & \text{si y sólo si} & f(g'_i) = g'_j
\end{array}$$

y se sigue de inmediato, usando la definición de producto directo de grupos que

$$\begin{array}{rcl} g_i \cdot h_i = g_j \cdot h_j & \text{si y sólo si} & g'_i \cdot h_i = g'_j \cdot h_j \\ e = g_i \cdot h_i & \text{si y sólo si} & e = g'_i \cdot h_i \\ g_i h_i \cdot g_j h_j = g_l h_l & \text{si y sólo si} & g'_i h_i \cdot g'_j h_j = g'_l h_l \\ f(g_i h_i) = g_j h_j & \text{si y sólo si} & f(g'_i h_i) = g'_j h_j. \end{array}$$

Por lo tanto ∃loísa también gana el juego

$$EF_k[G_1 \times H, G_2 \times H].$$

⊣

5 Órdenes Lineales

Veamos algunos resultados para los órdenes lineales finitos $\langle \mathbf{k}, < \rangle$, donde $\mathbf{k} = \{0, \ldots, k-1\}$ y para los órdenes lineales $\omega = \langle \mathbb{N}, < \rangle$, $\omega^\star = \langle \mathbb{N}, > \rangle$

Primero vamos a dar la versión del lema 4 para órdenes lineales.

Definición 10 Sean $\mathfrak{A}$ un orden lineal y $a \in |\mathfrak{A}|$. Entonces definimos

$$a \uparrow = \langle \ \{x \in |\mathfrak{A}| \mid a < x\}, < \ \rangle \quad a \downarrow = \langle \ \{x \in |\mathfrak{A}| \mid x < a\}, < \ \rangle$$

Lema 5 *(Lema de descomposición) Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ órdenes lineales. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a). $\exists lo_{n+1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

(b). Se cumplen las siguientes propiedades:

(Ida). Para toda $a \in |\mathfrak{A}|$ existe $b \in |\mathfrak{B}|$ tal que $\exists lo_n(a \uparrow, b \uparrow)$ y $\exists lo_n(a \downarrow, b \downarrow)$.

(Vuelta). Para toda $b \in |\mathfrak{B}|$ existe $a \in |\mathfrak{A}|$ tal que $\exists lo_n(a \uparrow, b \uparrow)$ y $\exists lo_n(a \downarrow, b \downarrow)$.

Demostración:
La demostración es análoga a la del lema 4, sólo basta observar para la parte "⇒", que después de elegir la primera jugada (a, b), al quedar n jugadas pendientes, la misma estrategia ganadora σ para $EF_{n+1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ sirve para cualquiera de los segmentos $a \uparrow, b \uparrow, a \downarrow, b \downarrow$. Si se elige un elemento x tal que $x < a$, por ejemplo, este puede considerarse como segundo movimiento en $EF_{n+1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ y como σ es ganadora necesariamente responde con un elemento y tal que $y < b$ y así sucesivamente hasta completar las n jugadas restantes. ⊣

Como primera aplicación de este lema obtenemos lo siguiente

Proposición 3 *Los órdenes lineales $\lambda = \langle \mathbb{R}, < \rangle$ y $\eta = \langle \mathbb{Q}, < \rangle$ son lógicamente indistinguibles, es decir, $\lambda \equiv \eta$.*

Demostración:
Por el corolario 1, dado que $\exists \mathrm{lo}_n[\lambda,\eta] = \exists lo_n(\lambda,\eta)$, basta mostrar que $\exists \mathrm{lo}_n[\lambda,\eta]$ para toda $n \in \mathbb{N}$.
Para esto obsérvese que si $a \in |\lambda|$ entonces $a \uparrow \cong \lambda \cong a \downarrow$ y si $b \in |\eta|$ entonces $b \uparrow \cong \eta \cong b \downarrow$, aplicar inducción sobre n y utilizar el lema 5. $\dashv$

Según este resultado cualquier propiedad, expresable en lógica de primer orden únicamente con el predicado que representa al $<$, acerca del orden de los racionales, será válida también para el orden de los reales.
Veamos ahora qué sucede al jugar con órdenes finitos.

Proposición 4 *Sean $k, m, n \in \mathbb{N}$. Entonces*

(a). Si $k, m \geq 2^n - 1$ entonces $\exists lo_n(\mathbf{k}, \mathbf{m})$;

(b). Si $k \geq 2^n - 1$ y $m < 2^n - 1$ entonces $\forall$belardo tiene una estrategia ganadora para $EF_n(\mathbf{k}, \mathbf{m})$.

Demostración:

(a). Por inducción sobre n. El caso para $n = 0$ es claro.
Sean $k, n \geq 2^{n+1} - 1$. Para mostrar que $\exists \mathrm{lo}_{n+1}(\mathbf{k}, \mathbf{m})$ utilizamos el lema 5. Vamos a demostrar la condición de (Ida) y la (Vuelta) es análoga. Sea $i \in \mathbf{k}$, obsérvese que $i \uparrow = \mathbf{k} - \mathbf{i} - \mathbf{1}$ y que $i \downarrow = \mathbf{i}$, además si tuvieramos $i, k-1-i < 2^n - 1$ entonces $k = 1 + i + k - 1 - i < 1 + (2^n - 1) + (2^n - 1) = 2^{n+1} - 1$ lo cual es absurdo. Por lo tanto i no puede ser a la vez uno de los primeros $2^n - 1$ elementos de $\mathbf{k}$ y uno de los últimos $2^n - 1$ elementos de $\mathbf{k}$. Análogamente para cualquier $j \in \mathbf{m}$. Según esto tenemos tres casos:

   I. i es uno de los primeros $2^n - 1$ elementos de $\mathbf{k}$, es decir, $i < 2^n - 1$. En este caso tomamos $j = i$. Claramente $\exists \mathrm{lo}_n(i \downarrow, j \downarrow)$. Además como $k-1-i, m-1-j \geq 2^n - 1$ entonces por hipótesis de inducción $\exists \mathrm{lo}_n(i \uparrow, j \uparrow)$.

   II. i es uno de los últimos $2^n - 1$ elementos de $\mathbf{k}$, es decir, $k - 1 - i > 2^n - 1$. En este caso elíjase $j \in \mathbf{m}$ tal que $m - 1 - j = k - 1 - i$ y procédase como en el caso anterior.

   III. i tiene al menos $2^n - 1$ predecesores y al menos $2^n - 1$ sucesores, es decir, $i, k - 1 - i \geq 2^n - 1$. En tal caso la hipótesis de inducción asegura que $\exists \mathrm{lo}_n(i \downarrow, j \downarrow)$ y $\exists \mathrm{lo}_n(i \uparrow, j \uparrow)$.

   Así la prueba está terminada.

(b). Inducción sobre n. El caso $n = 0$ se da por vacuidad. Para el caso $n + 1$, existe $j \in \mathbf{k}$ tal que $j \geq 2^n - 1$ y $k - j - 1 \geq 2^n - 1$, puesto que $2^{n+1} - 1 = (2^n - 1) + 1 + (2^n - 1)$; la estrategia ganadora para $\forall$belardo consiste en escoger tal j como su primera jugada, en este caso la elección de $\exists$loísa parte al orden lineal $\mathbf{m}$ en dos intervalos, uno de los cuales tiene menos de $2^n - 1$ elementos, puesto que $m < 2^{n+1} - 1$. Por lo tanto usando la hipótesis de inducción tenemos que $\forall$belardo tiene una estrategia ganadora para $EF_n(\mathbf{k}, \mathbf{m})$, misma estrategia que sigue para ganar $EF_{n+1}(\mathbf{k}, \mathbf{m})$. $\dashv$

Terminamos la sección con un resultado que involucra al orden $\omega + \omega^\star$, que es un orden lineal discreto que se descompone en dos subconjuntos ajenos A_1 y A_2 tales que A_1 tiene extremo izquierdo y no tiene extremo derecho; A_2 no tiene extremo izquierdo pero sí tiene extremo derecho y además cualquier elemento de A_1 es menor que cualquier elemento de A_2.

Proposición 5 *Si* $m \geq 2^n - 1$ *entonces* $\exists lo_n(\omega + \omega^\star, \mathbf{m})$

Demostración:
Usaremos nuevamente el lema de descomposición (lema 5).

- (Ida). Sea $i \in \omega + \omega^\star$. Hay dos casos.

  (a). $i \in \omega$. En este caso $i \downarrow = i$ e $i \uparrow = \omega + \omega^\star$.
  Si $i \leq m$ entonces procedemos como en la prueba de la prop 4(a), tomando $k = m$ y la j dada en cada uno de los tres casos analizados en esa proposición.
  Si $i > m$ entonces tomamos j como en el caso III de la proposición 4(a).

  (b). $i \in \omega^\star$.
  Así, siguiendo a la proposición 4(a), obtenemos en todos los casos que $\exists \mathrm{lo}_n(i \downarrow, j \downarrow)$.
  La demostración de que $\exists \mathrm{lo}_n(i \uparrow, j \uparrow)$ se sigue de la hipótesis de inducción al observar que, en todos los casos, $m - j - 1 \geq 2^n - 1$ y que $i \uparrow = \omega + \omega^\star$.

- (Vuelta). Sea $j \in \mathbf{m}$.
  Si $j \leq 2^n - 1$ tómese $i = j$; en otro caso tómese $i = j^\star$, donde $\omega^\star = \{\ldots, k^\star, (k-1)^\star, \ldots, 1^\star, 0^\star\}$, es decir $j^\star$ es el j-esimo predecesor del extremo derecho de $\omega + \omega^\star$.

$\dashv$

Los métodos de Ehrenfeucht-Fraïsse son de gran utilidad en toda la teoría de órdenes lineales, esta sección es sólo una muy breve introducción al tema, para ver una gran gama de aplicaciones del juego sugerimos consultar [5].

6 Otros Juegos

Para terminar mencionamos otros juegos que también proporcionan información importante entre dos modelos.

- La longitud juego de Ehrenfeucht-Fraïsse se puede extender a cualquier ordinal.
- $P_\omega(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ es igual que $EF_\omega(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ excepto que $\forall$belardo debe elegir siempre un elemento de $\mathfrak{A}$. La relación lógica es que si $|\mathfrak{A}|$ es a lo más numerable entonces $\exists$loísa tiene estrategia ganadora si y sólo si existe un encaje $F : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$.

- $H_\omega(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ se define como $EF_k(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ sólo que $\exists$loísa gana el juego $(\bar{a},\bar{b})$ si y sólo si para cualquier atómica φ, $\mathfrak{A}\models\varphi[\bar{a}]$ si y sólo si $\mathfrak{B}\models\varphi[\bar{b}]$. En este caso $\exists$loísa tiene estrategia ganadora si y sólo si $\mathfrak{B}$ es una imagen homomorfa de $\mathfrak{A}$.

Finalmente queremos mencionar que la teoría de juegos en teoría de modelos está muy lejos de ser una teoría completamente estudiada, actualmente sus aplicaciones crecen sobre todo en el campo de la ciencia de la computación teórica donde los modelos de interés son casi siempre finitos; su principal campo de aplicación es en relación con la teoría de la complejidad, el lector interesado con este tema de muy reciente creación puede consultar [6].

Bibliografía

[1] K. Doets. Basic Model Theory. Studies In Logic, Language and Information. *CSLI & FoLLI*. 1996.

[2] A. Ehrenfeucht. *An application of games to the completeness problem for formalized theories*. Fundamenta Mathematicae **49**. 1961.

[3] R. Fraïssé. *Sur quelques classifications des systèmes de relations*. Publ. Sci. Univ. Alger. Série **A**. 1954.

[4] W. Hodges. A Shorter Model Theory. *Cambridge University Press*. 1997.

[5] J. G. Rosenstein. Linear Orderings. *Academic Press*. 1982.

[6] M. Y. Vardi. *Computational Model Theory: An Overview*. Journal of the IGPL. **6**(4). 1998.