Tarea No. 2

Ideales, Homomorfismos, Teoremas de Isomorfismo.

1. Demuestra el siguiente resultado (caracterización de un ideal I).

   Sea I un subconjunto no vacío de una anillo R. Entonces I es un ideal (bilateral) de R, si y sólo si,

   a) $a, b \in I$ implica $a - b \in I$ para todo $a, b \in I$;

   b) $r \in R$ y $a \in I$ implica $ra, ar \in I$.

2. Demuestra el siguiente resultado: Sea I un ideal de un anillo R, entonces el grupo aditivo R/I (con las operaciones definidas en clase) es un anillo.

   Sugerencia: Basta probar 1) la operación producto $(a+I)(b+I) = ab+I$ esta bien definida (se hizo en clase), 2) la asociatividad del producto, i.e $(a+I)((b+I)(c+I)) = ((a+I)(b+I))(c+I)$, 3) las dos leyes distributivas.

   A este anillo se le conoce como el **anillo cociente** de R entre I.

3. Sea I un ideal del anillo R. Demuestra lo siguiente:

   a) El anillo R/I no tiene divisores de cero, si y solamente si, $ab \in I$ implica que $a \in I$ ó $b \in I$.

   b) El anillo R/I es conmutativo, si y solamente si, $ab - ba \in I$ para todo $a, b \in R$.

   c) Si R es un anillo conmutativo con uno, 1_R, entonces el anillo cociente R/I es un anillo conmutativo con uno.

4. Sea $\{I_i\}_{i\in A}$ una colección arbitraria de ideales (derechos, izquierdos, bilaterales) de un anillo R. Demuestra que $\cap_{i\in A} I_i$ es también un ideal (derecho, izquierdo, bilateral) de R.

5. Sea R un anillo y S un subconjunto de R. Denotamos por $\langle S\rangle := \cap\{I \,:\, S \subseteq I \,e\, I\, es\, ideal\, de\, R\}$. Demuestra que si J es un ideal de R tal que $S \subseteq J$ entonces $\langle S\rangle \subseteq J$. Al ideal $\langle S\rangle$ se le conoce como el **ideal generado por el conjunto** S. También se dice que $\langle S\rangle$ es el ideal más pequeno que contiene a S.

6. Un conmutador en un anillo R se define como un elemento de la forma $ab-ba$ con $a, b \in R$. El **ideal conmutador de** R denotado por $[R, R]$ es el ideal generado por el conjunto de todos los conmutadores de R. Demuestra que

   a) R es un anillo conmutativo, si y solamente si, $[R, R] = \{0\}$;

   b) para un ideal I de R, el anillo cociente R/I es conmutativo, si y sólo si, $[R, R] \subseteq I$.

   Observación.- En cierto sentido, del inciso a) tenemos que el tamano de $[R, R]$ mide la no conmutatividad de R.

7. Sea $\{I_a\}_{a\in A}$ una colección arbitraria de ideales derechos del anillo R. Demuestra que $\cap_{a\in A} I_a$ es un ideal derecho de R.

8. Sea I un ideal de R. Decimos que I es un **ideal propio** de R si $I \neq R$. Sea I un ideal propio (derecho, izquierdo ó bilateral) de un anillo R con uno. Demuestra que ningún elemento de I posee un inverso multiplicativo.

9. Sea R un anillo y $a \in R$.

   a) Determina explícitamente el ideal (bilateral) generado por $\{a\}$.

   b) Suponiendo que R tiene uno. Determina explícitamente el ideal (bilateral) generado por $\{a\}$.

   c) Suponiendo R tiene uno y R es conmutativo

      1) Determina el ideal generado por $\{a\}$.

      2) Determina el ideal generado por $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$

10. Sea R un anillo y $a \in R$.

    a) El ideal $\langle a \rangle$ se dice que es un **ideal principal**.

    b) Si R es un dominio entero y cada ideal I de R es de la forma $\langle a \rangle$ para algún $a \in R$, decimos que R es un Dominio de ideales principales.

    c) Demuestra que el anillo de los números enteros $\mathbb{Z}$ es un dominio de ideales principales.

    Sugerencia: Si $I \neq 0$ considera n el menor entero positivo en I. Usa el Algoritmo de la división para demostrar que $\langle n \rangle = I$

11. Da un ejemplo de un anillo de ideales principales.

12. Sea R un anillo. Se dice que R es un **anillo simple** si los únicos ideales (bilaterales) de R son R y 0. Da un ejemplo de un anillo simple.

13. Sean $I_1, I_2, \ldots, I_n$ ideales de un anillo R. Demuestra que los siguientes enunciados son equivalentes:

    a) R es la suma directa interna de $I_1, I_2, \ldots, I_n$;

    b) cada elemento x de R se puede expresar de manera única como

    $$x = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

    donde $a_i \in I_i$.

14. Sea R un anillo con uno. Demuestra que R es anillo con división, si y sólo si, los únicos ideales izquierdos y derechos de R son $\{0\}$ y R.

15. Sea R un anillo con uno. Demuestra lo siguiente.

    a) R=I, si y sólo si I, tiene un elemento invertible.

    b) Si R es anillo conmutativo. Entonces R es campo, si y sólo si, $\{0\}$ y R son los únicos ideales de R.

16. Sea $f : R \to R'$ un homomorfismo de anillos. Demuestra lo siguiente:

a) $f(0) = 0$;

b) $f(-a) = -f(a)$;

c) Si R y R' son anillos con 1 y $f(R) = R'$. Demuestra lo siguiente:

i) $f(1) = 1'$;

ii) $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$, para cualquier elemento invertible a de R.

17. Sea $f : R \to R'$ un homomorfismo de anillos. Demuestra lo siguiente:

    a) para cada ideal I' de R', el anillo $f^{-1}(I')$ es un ideal de R;

    b) Si $f(R) = R'$ entonces para cada ideal I de R, el anillo $f(I)$ es un ideal de R'.

18. Demuestra el siguiente resultado. Sea $f : F \to F'$ un homomorfismo del campo F en el campo F'. Entonces f es el homomorfismo trivial o f es un monomorfismo.

19. Demuestra el siguiente resultado: Sea I un ideal del anillo R. Entonces la función $\pi_I : R \to R/I$ dada por $\pi_I(r) = r + I$ es un homomorfismo suprayectivo de anillos. Además $\ker \pi_I = I$.

    A este epimorfismo se le conoce como la **proyección canónica**.

20. Demuestra el siguiente resultado: Sea $f : R \to R'$ un isomorfismo de anillos. Entonces la función $f^{-1} : R' \to R$ dada por $f^{-1}(r') = r$ (donde $r \in R$ es el único elemento tal que $f(r) = r'$) es un isomorfismo de anillos.

21. Demuestra que el anillo $\mathbb{Z}_n$ de los enteros módulo n tiene exactamente un ideal por cada entero positivo m que divida a n.

    Sugerencia: Usa el Teorema de la Correspondencia.

22. Demuestra que el único homomorfismo no trivial $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ es el homomorfismo identidad.

23. Demuestra el siguiente resultado: Sea $f : R \to R'$ un homomorfismo suprayectivo de anillos, y sea I un ideal de R. Si $\ker f \subseteq I$, entonces R/I es isomorfo a $R'/f(I)$.

    Este resultado es equivalente al **Tercer Teorema de isomorfismo.**

24. Utiliza el ejercicio anterior para para deducir el Tercer Teorema de Isomorfismo. Esto es, demuestra el siguiente resultado.

    Sean I y J ideales de R con $J \subseteq I$. Entonces

    a) I/J es ideal de R/J;

    b) $(R/J)/(I/J) \simeq R/I$.

    Finalmente, verifica que el Tercer Teorema de isomorfismo es válido para anillos con uno.

25. Demuestra el siguiente resultado. Sea $f : R \to R'$ un homomorfismo suprayectivo de anillos. Si I' es un ideal de R', entonces $R/f^{-1}(I')$ es isomorfo a R'/I'.

26. Demuestra el siguiente resultado: Si I y J son ideales de un anillo R, entonces $I/(I \cap J)$ es isomorfo a $(I + J)/J$.

    A este resultado se le conoce como el **Segundo Teorema de isomorfismo.**