Combinaciones lineales, subespacio vectorial generado por un conjunto S, conjuntos linealmente independientes, bases, dimensin de un espacio vectorial

1. Para cada uno de los siguientes grupos de polinomios en $P_3(\mathbb{R})$, determina si el primer polinomio puede o no ser expresado como una combinacin lineal de los otros dos:

   a) $x^3 - 3x + 5$, $x^3 + 2x^2 - x + 1$, $x^3 + 3x^2 - 1$.

   b) $4x^3 + 2x^2 - 6$, $x^3 - 2x^2 + 4x + 1$, $3x^3 - 6x^2 + x + 4$.

2. Para cada uno de los siguientes grupos de vectores en $\mathbb{R}^3$, determine si el primer vector puede o no ser expresado como combinacin lineal de los otros dos.

   a) $(-2, 0, 3)$, $(1, 3, 0)$, $(2, 4, -1)$

   b) $(1, 2, -3)$, $(-3, 2, 1)$, $(2, -1, -1)$

   c) $(-2, 2, -2)$, $(1, 2, -1)$, $(-3, -3, 3)$

3. En F^n sea e_j el vector cuya coordenada j-esima es 1 y cuyas otras coordenadas son 0. Demostrar que $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ generan a F^n.

4. Muestra que $P_n(F)$ puede generarse por $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$.

5. Da un conjunto finito que genere a $M_{2\times 2}(F)$.

6. Demuestra el siguiente resultado. Sean V un espacio vectorial sobre un campo F, S un subconjunto no vacío de V y $\mathcal{F} = \{W \,:\, W\, es\, un\, subespacio\, vectorial\, de\, V\, y\, S \subseteq W\}$. Entonces $\cap_{W\in\mathcal{F}} W = \langle S \rangle$.

7. Sean $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ definidas por $f(t) = e^{rt}$ y $g(t) = e^{st}$, donde $r \neq s$. Demuestra que $\{f, g\}$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ linealmente independiente.

8. Encuentra un conjunto de matrices diagonales linealmente independientes que generan al espacio vectorial de matrices diagonales de 2×2.

9. Demuestra que $\{u, v\}$ es linealmente independiente si y slo si $\{u + v, u - v\}$ es linealmente independiente.

10. Demuestra que un conjunto S de vectores es linealmente independiente si y slo si cada subconjunto finito de S es linealmente independiente.

11. Determina cuáles de los siguientes conjuntos son bases para $\mathbb{R}^3$.

    a) $\big\{(1, 0, -1), (2, 5, 1), (0, -4, 3)\big\}$

    b) $\big\{(2, -4, 1), (0, 3, -1), (6, 0, -1)\big\}$

    c) $\big\{(1, 2, -1), (1, 0, 2), (2, 1, 1)\big\}$

    d) $\big\{(-1, 3, 1), (2, -4, -3), (-3, 8, 2)\big\}$

  e) $\{(1,-3,-2),(-3,1,3),(-2,-10,-2)\}$

12. Determina cuáles de los siguientes conjuntos son bases para $P_2(\mathbb{R})$.

    a) $\{-1-x+2x^2, 2+x-2x^2, 1-2x+4x^2\}$
    b) $\{1+2x+x^2, 3+x^2, x+x^2\}$
    c) $\{1+4x-2x^2, -2+3x-x^2, -3-12x+6x^2\}$

13. Generan los polinomios x^3-2x^2+1, $4x^2-x+3$ y $3x-2$ a $P_3(\mathbb{R})$? Justifica tu respuesta.

14. Es $\{(1,4,-6),(1,5,8),(2,1,1),(0,1,0)\}$ un subconjunto linealmente independiente de $\mathbb{R}^3$? Justifica tu respuesta.

15. Da tres bases diferentes para F^2 y para $M_{2\times 2}(F)$.

16. Los vectores $x_1=(2,-3,1)$, $x_2=(1,4,-2)$, $x_3=(-8,12,-4)$, $x_4=(1,37,-17)$ y $x_5=(-3,-5,8)$ generan a $\mathbb{R}^3$. Encuentra un subconjunto de $\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$ que sea base para $\mathbb{R}^3$.

17. Los vectores $x_1=(1,1,1,1)$, $x_2=(0,1,1,1)$, $x_3=(0,0,1,1)$ y $x_4=(0,0,0,1)$ forman una base para F^4. Encontrar la única representación de un vector arbitrario (a_1,a_2,a_3,a_4) en F^4 como combinación lineal de los vectores x_1, x_2, x_3 y x_4.

18. Sean S_1 y S_2 subconjuntos de un espacio vectorial V. Demuestra que:

    a) Si $S_1\subseteq S_2$ entonces $\langle S_1\rangle\subseteq\langle S_2\rangle$.
    b) $\langle S_1\cup S_2\rangle=\langle S_1\rangle+\langle S_2\rangle$.
    c) $\langle S_1\cap S_2\rangle\subseteq\langle S_1\rangle\cap\langle S_1\rangle$.

19. Sean X, Y, Z subespacios vectoriales de un espacio vectorial V. Demuestra que si X es subespacio de Y, entonces
    $$Y\cap(X+Z)=X+(Y\cap Z).$$

20. Sean W_1 y W_2 subespacios vectoriales de un espacio vectorial V. Demuestra que $W_1\cup W_2$ es subespacio vectorial de V si y sólo si $W_1\subseteq W_2$ o $W_2\subseteq W_1$.

21. Sea W un subespacio vectorial de un espacio vectorial V de dimensión finita n. Demuestra que:

    a) W es de dimensin finita;
    b) $\dim(W)\leq n$;
    c) Si $\dim(W)=n$ entonces $V=W$.

22. Sea W un subespacio vectorial de un espacio vectorial V de dimensión finita n. Demuestra que cualquier base γ de W es un subconjunto de una base de V.
    Sugerencia: Usa Teorema visto en clase.

23. Sean W_1 y W_2 subespacios vectoriales de dimensión finita de un espacio vectorial V. Demuestra que:

a) $W_1 + W_2$ tiene dimensin finita;

b) $\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$.

24. Sean W_1 y W_2 subespacios vectoriales de dimensin finita de un espacio vectorial V tales que $V = W_1 + W_2$. Demuestra que:
$V = W_1 \oplus W_2$ si y slo si, $\dim(V) = \dim(W_1) + \dim(W_2)$.
Sugerencia: Usa el ejercicio anterior.

25. Sea W_1 un subespacio de un espacio vectorial V de dimensin finita. Demuestra que existe un subespacio W_2 de V tal que $V = W_1 \oplus W_2$.

26. Sean W_1 y W_2 subespacios de un espacio vectorial V de dimensiones m y n respectivamente, donde $m \geq n$. Demostrar que $\dim(W_1 \cap W_2) \leq n$ y $\dim(W_1 + W_2) \leq m + n$. Dar ejemplos en $\mathbb{R}^3$ donde cada desigualdad se convierta en igualdad.

27. Sea $\{x, y\}$ una base de un espacio vectorial V. Mostrar que tanto $\{x+y, x-y\}$, como $\{ax, by\}$ son bases para V, donde a y b son escalares arbitrarios no nulos.

28. Encontrar bases para los siguientes subespacios de F^5.

    a) $W_1 = \big\{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in F^5 : a_1 - a_3 - a_4 = 0\big\}$

    b) $W_2 = \big\{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in F^5 : a_2 = a_3 = a_4,\ a_1 + a_5 = 0\big\}$ Cules son las dimensiones de W_1 y W_2?

29. El conjunto de todas las matrices de $n \times n$ cuya traza es igual a cero es un subespacio W de $M_{n\times n}(F)$. Encontrar una base para W. Cuál es la dimensión de W?

30. Demuestra que el conjunto $\{v_1, v_2, v_3, \ldots\}$ (infinito) es linealmente independiente si, y sólo si $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es linealmente independiente para cada $n \geq 1$.

31. Sea V un espacio vectorial con base γ. Demuestra que

    a) Si $\gamma = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, entonces $\big\{e_1, (e_1 + e_2), \ldots, (e_1 + e_2 + \cdots + e_n)\big\}$ también es base de V.

    b) Si $\gamma = \{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$ (es un conjunto infinito), entonces $\big\{e_1, (e_1 + e_2), (e_1 + e_2 + e_3), \ldots\big\}$ también es base de V.
    Sugerencia: Usa el ejercicio anterior.

32. Nota que el conjunto de polinomios trigonomtricos,

$$\mathcal{PT}(\mathbb{R}) = \left\{ \sum_{k=0}^{n} \big(a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)\big) : a_k,\ b_k \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

es un subespacio de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ y demuestra que $\big\{\operatorname{sen}(nx) : n \in \mathbb{N}\big\} \cup \big\{\cos(nx) : n \in \mathbb{N}\big\}$ es una base para este.

33. Demuestra que para cualesquiera $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$, $N(n, x) = \big\{p \in P_n(\mathbb{R}) : p(x) = 0\big\}$ es un subespacio vectorial de $P_n(\mathbb{R})$. Además ncuentra bases para los espacios vectoriales

a) $N(n,0)$

b) $N(3,2)$

c) $N(4,-1)$

d) $N(n,1)$

e) $\bigcap_{i=0}^{n} N(n,i) = N(n,0) \cap N(n,1) \cap \ldots \cap N(n,n)$

f) $N(n,12) + N(n,21)$

34. Demuestra lo siguiente:

    a) Si V es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial, entonces V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y su dimensión como $\mathbb{R}$-espacio es dos veces su dimensión como $\mathbb{C}$-espacio.

    b) Sea F un campo finito. Demuestra que V es un espacio vectorial de dimensión finita si, y sólo si V es un conjunto finito.

35. Sea V un espacio vectorial de dimension finita sobre un campo F y W un subespacio de este. Se define el cociente de V por W como $V/W = \{v+W : v \in V\}$, donde $v+W = \{v+w : w \in W\}$. Demuestra que las operaciones

$$c \cdot (v+W) := cv + W \qquad \text{y} \qquad (v+W)\widehat{+}(u+W) := (v+u) + W,$$

con $c \in F$ y $u, v \in V$, se encuentran bien definidas (es decir, que para cualesquiera $h \in v+W$ y $g \in u+W$, $ch + W = cv + W$ y $(v+u) + W = (h+g) + W$) y nota que V/W es un espacio vectorial con estas operaciones. Finalmente, encuentra una base para V/W y describe su dimensión en términos de las dimensiones de V y W.