**Espacios vectoriales, subespacios vectoriales, suma y suma directa de subespacios.**

1. Demuestra que en cualquier espacio vectorial $V$, se cumple que $(a+b)(x+y) = ax+ay+bx+by$ para toda $x, y \in V$ y cualquier $a, b \in F$.

2. Demuestra que si $W$ es un subespacio vectorial de $V$ y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son elementos de $W$, entonces $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$ es un elemento de $W$ para cualesquiera escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n \in F$.

3. Sea $V$ el conjunto de todas las funciones derivables de valores reales definidas sobre los reales. Demuestra que $V$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, bajo las operaciones suma y multiplicación definidas en clase.

4. Sea $V = \{0\}$ que consta de un único vector $0$ y define $0 + 0 = 0$ y $c0 = 0$, para cada $c \in F$. Demuestra que $V$ es un espacio vectorial sobre $F$. (Se le llama el espacio vectorial cero).

5. Sea $V$ el conjunto de pares ordenados de números reales. Si $(a_1, a_2)$ y $(b_1, b_2)$ son elementos de $V$ y $c$ es un elemento de $\mathbb{R}$, define $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ y $c(a_1, a_2) = (ca_1, ca_2)$. ¿Es $V$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con estas operaciones?. Justifica tu respuesta.

6. Sea $V = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in \mathbb{C} \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n\}$. ¿Es $V$ un espacio vectorial sobre el campo de los números reales con las operaciones de suma y multiplicación con correspondencia de elementos?.

7. Sea $V = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in \mathbb{R} \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n\}$. ¿Es $V$ un espacio vectorial sobre el campo de los números complejos con las operaciones de suma y multiplicación con correspondencia de elementos?. Justifica tu respuesta.

8. Sea $V$ el conjunto de pares ordenados de números reales. Si $(a_1, a_2)$ y $(b_1, b_2)$ son elementos de $V$ y $c$ es un elemento de $\mathbb{R}$, define

   $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$, $c(a_1, a_2) = (0, 0)$ si $c = 0$, y $c(a_1, a_2) = (ca_1, a_2/c)$ si $c \neq 0$. ¿Es $V$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con estas operaciones?. Justifica tu respuesta.

9. Sea $V$ el conjunto de pares ordenados de números reales. Si $(a_1, a_2)$ y $(b_1, b_2)$ son elementos de $V$ y $c$ es un elemento de $\mathbb{R}$, define

   $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + 2b_1, a_2 + 3b_2)$ y $c(a_1, a_2) = (ca_1, ca_2)$. ¿Es $V$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con estas operaciones?. Justifica tu respuesta.

10. Demuestra que las matrices diagonales son matrices simétricas.

11. Demuestra que $tr(aA + bB) = atr(A) + btr(B)$, para toda $A, B \in \mathbb{M}_{n\times n}(F)$, donde $F$ es un campo.

12. Verifica que los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^3$, bajo las operaciones de suma y multiplicación por escalares definidas en $\mathbb{R}^3$.

a) $W_1 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 : a_1 = 3a_2 \text{ y } a_3 = -a_2\}$.

b) $W_2 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 : 2a_1 + a_2 + 5a_3 = 0\}$.

c) $W_3 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 : a_1 - 4a_2 - a_3 = 0\}$.

13. Sean $W_1, W_2$ y $W_3$ como en el ejercicio anterior. Describe $W_1 \cap W_2, W_2 \cap W_3, W_1 \cap W_3$.

14. Una matriz $A$ de $m \times n$ se llama triangular superior si todos los términos ubicados por debajo de la diagonal valen cero, esto es, $A_{ij} = 0$ siempre que $i > j$. Verifica que las matrices triangulares superiores forman un subespacio de $\mathbb{M}_{m\times n}$.

15. Demuestra que un subconjunto $W$ de un espacio vectorial $V$ es un subespacio de $V$ si, y sólo si $0 \in W$ y $ax + y \in W$, siempre que $a \in F$ y $x, y \in W$.

16. Sean $V$ y $W$ espacios vectoriales sobre un campo $F$ y

$$Z = \{(v, w) : v \in V \text{ y } w \in W\}.$$

Demuestra que $Z$ es un espacio vectorial sobre $F$ con las operaciones

$$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2) \quad \text{y} \quad c(v_1, w_1) = (cv_1, cw_1).$$

17. Sean $W_1, W_2$ subespacios de un espacio vectorial $V$. Demuestra que $W_1 \cup W_2$ es un subespacio de $V$ si, y sólo si $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$.

18. Sean $W_1, W_2$ subespacios de un espacio vectorial $V$. Demuestra que $V$ es la suma directa de $W_1$ y $W_2$ si, y sólo si cada vector $v \in V$ se puede escribir de manera única como $v = x_1 + x_2$ con $x_1 \in W_1$ y $x_2 \in W_2$.

19. Una matriz cuadrada $M$ se dice que es **antisimétrica** si $M^t = -M$. Sea $F$ un campo. Demuestra que el conjunto $W_1$ de todas las matrices antisimétricas de $n \times n$ con entradas en $F$ es un subespacio de $\mathbb{M}_{n\times n}(F)$.

20. Sea $W$ un subespacio de un espacio vectorial $V$ sobre un campo $F$. Para cada $v \in V$ definimos el conjunto

$$\{v\} + W = \{v + w : w \in W\},$$

llamado la **clase lateral** de $W$ que **contiene** a $v$. Lo denotamos por $v+W$ en vez de $\{v\}+W$.

a) Demuestra que $v + W$ es un subespacio de $V$ si, y sólo si $v \in W$.

b) Demuestra que $v_1 + W = v_2 + W$ si, y sólo si $v_1 - v_2 \in W$.

21. Sea $W_1$ el conjunto de polinomios $f$ en $P(F)$ tales que $f(x) = 0$, o en la representación $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, los coeficientes $a_0, a_2, a_4, \ldots$ de todas las potencias pares de $x$ son iguales a cero. Análogamente, sea $W_2$ el conjunto de todos los polinomios $g$ en $P(F)$ tales que $g(x) = 0$ o, en la representación $g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0$, los coeficientes $b_1, b_3, \ldots$ de todas las potencias impares de $x$ son iguales a cero. Demuestra que $P(F) = W_1 \oplus W_2$.

22. Sea $W_1 = \{A \in \mathbb{M}_{m\times n} : A_{ij} = 0 \text{ cuando } i > j\}$ y $W_2 = \{A \in \mathbb{M}_{m\times n} : A_{ij} = 0 \text{ cuando } i \leq j\}$. Demuestra que $\mathbb{M}_{m\times n}(F) = W_1 \oplus W_2$.

23. Dados dos conjuntos $X, Y$, denotamos $X^Y$ al conjunto de funciones que van de $Y$ a $X$. Sea $F$ un campo y $X$ un conjunto. Demuesra que $F^X$ es un espacio vectorial con las operaciones $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ y $(cf)(x) = cf(x)$ para $f, g \in F^X$ y $c \in F$. Muestra que para $A \subseteq X, N_A = \{f \in F^X : f(a) = 0 \ \forall \ a \in A\}$ es un subespacio de $F^X$. Finalmente, demuestra que para cualquier $A \subseteq X, F^X = N_A \oplus N_{X\setminus A}$.

24. Recuerda que una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es par si $f(-x) = f(x)$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$ y es impar si $f(-x) = -f(x)$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$. Verifica que $\mathcal{P} = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f \text{ es par}\}$ y $\mathcal{T} = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f \text{ es impar}\}$ son subespacios de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ y demuestra que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{T}$.

25. Sean $V$ un espacio vectorial y $A, B, C$ subespacios de este. Demuestra lo siguiente.

    *a*) Si $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \{0\}$, entonces $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$.

    *b*) Si $A \cap B = \{0\}$, entonces $A \oplus B = B \oplus A$.

    *c*) Si $A$ y $B$ son subespacios de $C$, entonces $A + B$ es un subespacio de $C$.

    *d*) $\{0\} \oplus A = A$.

26. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ (tales que $a$ y $b$ no pueden ser 0 al mismo tiempo ni $c$ y $d$ pueden ser 0 al mismo tiempo), $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax+by = 0\}$ y $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : cx+dy = 0\}$. Demuestra que $U$ y $V$ son subespacios de $\mathbb{R}^2$ y que $U \oplus V = \mathbb{R}^2$ si, y sólo si el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} ax + by &= 0 \\ cx + dy &= 0 \end{aligned}$$

    tiene una única solución.

27. Sean $X, Y$ conjuntos, la diferencia simétrica de estos es $X \triangle Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$ y el conjunto potencia de $X$ es $\mathfrak{P}(X)$. Recuerda también que $\mathbb{Z}_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ es un campo. Muestra que para cualquier conjunto $X, \mathfrak{P}(X)$ es un $\mathbb{Z}_2$ -espacio vectorial con las operaciones $A + B = A \triangle B$, $\overline{1}A = A$ y $\overline{0}A = \emptyset$ para cualquier $A \in \mathfrak{P}(X)$.

    Demuestra también que $\mathfrak{P}_{fin}(X) = \{A \in \mathfrak{P}(X) : A \text{ es un conjunto finito}\}$ es un subespacio de $\mathfrak{P}(X)$ y que para cualquier $A \in \mathfrak{P}(X), \mathfrak{P}_{fin}(A)$ es un subespacio de $\mathfrak{P}_{fin}(X)$. Finalmente, demuestra que para cualquier $A \in \mathfrak{P}(X), \mathfrak{P}_{fin}(X) = \mathfrak{P}_{fin}(A) \oplus \mathfrak{P}_{fin}(X \setminus A)$.