Solución numérica de Ecuaciones Diferenciales Elípticas en Regiones Planas Irregulares Usando Mallas Estructuradas.

F. Domínguez-Mota, S. Mendoza*, M. Equihua y J.G. Tinoco

U.M.S.N.H.

Seminario del Laboratorio de Cómputo Científico Facultad de Ciencias, UNAM.

Índice

Introducción

- Existen métodos variacionales eficientes y robustos para generar mallas estructuradas suaves y convexas en regiones planas irregulares.
- Para esta clase de mallas, los esquemas en diferencias finitas se emplean para aproximar la solución de ecuaciones diferenciales en dichas regiones.

Generación Variacional de Mallas

- La idea principal de la generación variacional de mallas para generar mallas estructuradas suaves y convexas consiste en minimizar un funcional apropiado.

Funcionales

- Los funcionales usados para generar las mallas de los problemas propuestos son, el funcional de *Suavidad Bilateral*

$$F_{SB} = \frac{1}{2N} \sum_{q=1}^{N} \left[\frac{\lambda_q - 2\alpha_q}{k_1 + \alpha_q} + \frac{\lambda_q - 2\alpha_q}{k_2 + \alpha_q} \right]$$

- y el funcional de *Área Bilateral-Longitud.*

$$F_{ABL} = \sum_{q=1}^{N} \left[\frac{1}{k_1 + \alpha_q} + \frac{1}{k_2 + \alpha_q} + \lambda_q \right]$$

Bases

- *Definición*
  Una malla $\mathbf{x}(\xi, \eta) = (x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$ sobre una región $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es una biyección continua
  $$\mathbf{x} : R \mapsto \Omega$$
  donde R es el cuadrado unitario $[0, 1] \times [0, 1]$.

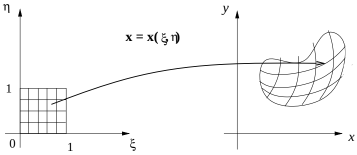
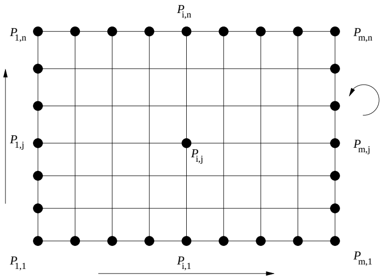


Figura: Malla sobre la región Ω

Malla I

- Denotemos una malla de *m* por *n* puntos.



$$G = \{P_{i,j} | 1 \leq i \leq \ m, 1 \leq j \leq n\}$$

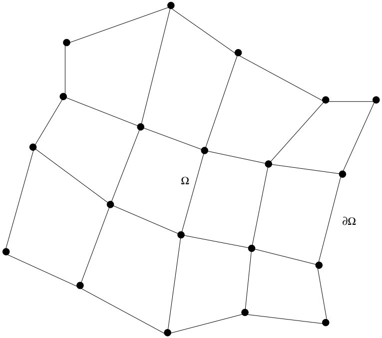
Diferencias finitas

- Para el caso de 1D.
- Esquemas en diferencias.

$$\frac{du(x)}{dx}\Big|_{x_i} \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}$$

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2}\Big|_{x_i} \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$$

Malla lógicamente rectangular



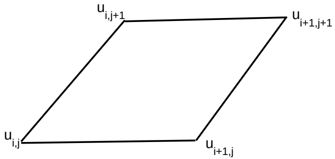
- Para regiones planas irregulares se trabaja con esquemas en diferencias finitas cuya evaluación no es tan simple como en el caso rectangular.

Diferencias finitas

$$grad\, u(x,y) = \begin{pmatrix} D_x(u) \\ D_y(u) \end{pmatrix}$$

$$(D_x(u))_{i,j} \approx \frac{(u_{i+1,j+1} - u_{i,j})(y_{i,j+1} - y_{i+1,j}) - (u_{i,j+1} - u_{i+1,j})(y_{i+1,j+1} - y_{i,j})}{2\Omega_{i,j}}$$

$$(D_y(u))_{i,j} \approx \frac{(u_{i+1,j+1} - u_{i,j})(x_{i,j+1} - x_{i+1,j}) - (u_{i,j+1} - u_{i+1,j})(x_{i+1,j+1} - x_{i,j})}{2\Omega_{i,j}}$$



Diferencias finitas

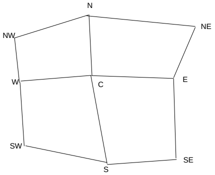
La idea principal es reemplazar las derivadas por combinaciones lineales: dados $p_1, p_2, ..., p_k$, queremos encontrar coeficientes $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_k$ tales que

$$\frac{\partial^q u}{\partial x^l \partial y^{q-l}}\Big|_{x=x_*} \approx \sum_i \Gamma_i u_i .$$

Como sabemos, en regiones rectangulares no es difícil calcular el valor de Γ_i.

- El cálculo de estos coeficientes a sido estudiados por ejemplo por *Tinoco* y *Shashkov*.
- Para este trabajo hemos usado los esquemas desarrollados para ecuaciones elípticas.

Diferencias finitas



- Para el operador $-\nabla \circ (K(x,y)\nabla u(x,y))$ en un nodo $p_{i,j}$ de la malla es aproximado mediante:

$$
\begin{aligned}
[-\nabla \circ (K(x,y)\nabla u(x,y))]_{i,j} &\approx C_{i,j}u_{i,j} + E_{i,j}u_{i+1,j} + NE_{i,j}u_{i+1,j+1} \\
&+ N_{i,j}u_{i,j+1} + NW_{i,j}u_{i-1,j+1} \\
&+ W_{i,j}u_{i-1,j} + SW_{i,j}u_{i-1,j-1} \\
&+ S_{i,j}u_{i,j-1} + SE_{i,j}u_{i+1,j-1}
\end{aligned}
$$

E

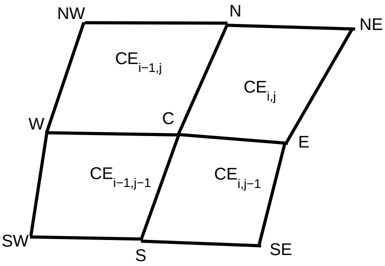
$$
\begin{aligned}
E_{i,j} &= (y_{i,j+1} - y_{i+1,j}) \left(\frac{K_{11}(P_{i,j})}{2\mathcal{A}_{i,j}} \right) (y_{i,j} - y_{i+1,j+1}) \\
&+ (y_{i+1,j} - y_{i,j-1}) \left(\frac{K_{11}(P_{i,j-1})}{2\mathcal{A}_{i,j-1}} \right) (y_{i+1,j-1} - y_{i,j}) \\
&- (y_{i,j+1} - y_{i+1,j}) \left(\frac{K_{12}(P_{i,j})}{2\mathcal{A}_{i,j}} \right) (x_{i,j} - x_{i+1,j+1}) \\
&- (y_{i+1,j} - y_{i,j-1}) \left(\frac{K_{12}(P_{i,j-1})}{2\mathcal{A}_{i,j-1}} \right) (x_{i+1,j-1} - x_{i,j}) \\
&- (x_{i,j+1} - x_{i+1,j}) \left(\frac{K_{12}(P_{i,j})}{2\mathcal{A}_{i,j}} \right) (y_{i,j} - y_{i+1,j+1})
\end{aligned}
$$

E cont...

$$
\begin{aligned}
& - & (x_{i+1,j} - x_{i,j-1}) \left(\frac{K_{12}(P_{i,j-1})}{2\mathcal{A}_{i,j-1}} \right) (y_{i+1,j-1} - y_{i,j}) \\
& + & (x_{i,j+1} - x_{i+1,j}) \left(\frac{K_{22}(P_{i,j})}{2\mathcal{A}_{i,j}} \right) (x_{i,j} - x_{i+1,j+1}) \\
& + & (x_{i+1,j} - x_{i,j-1}) \left(\frac{K_{22}(P_{i,j-1})}{2\mathcal{A}_{i,j-1}} \right) (x_{i+1,j-1} - x_{i,j}) \\
P_{i,j} & = & (x_{i,j}, y_{i,j}) \\
K(x,y) & = & \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

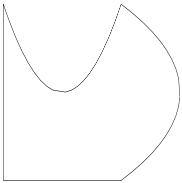
Diferencias finitas

- Donde K es evaluado en el centro de la celda CE_{ij} y $\mathcal{A}_{i,j}$ es el promedio de las áreas de las celdas $CE_{i,j}, CE_{i-1,j}, CE_{i,j-1}$ y $CE_{i-1,j-1}$.

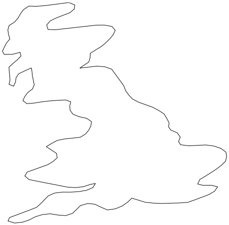


Regiones

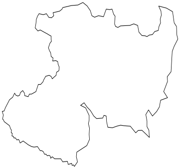
- Como ejemplos numéricos se presentan tres regiones poligonales con las que trabajamos: Swan, Great Britain y Michoacán.



Swan



Great Britain



Michoacán

Mallados

- Usamos mallas convexas para estas regiones con 21, 41, 61 y 81 puntos las cuales fueron generadas minimizando los funcionales de Suavidad Bilateral y Área Bilateral-Longitud.

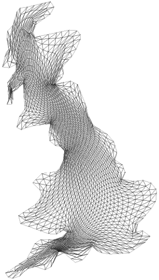


Figura: Great Britain

Ejemplos Numéricos

- Para comparar, empleamos elemento finito.
- En ambos casos los sistemas algebraicos se resolvieron usando Gauss-Seidel.
- Primer ejemplo.

$$K(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad u = 2\exp(2x + y).$$

Ejemplos Numéricos

- Segundo ejemplo.

$$K(x,y) = P^T DP,$$

con

$$P = \begin{pmatrix} cos(\frac{\pi}{8}) & sin(\frac{\pi}{8}) \\ -sin(\frac{\pi}{8}) & cos(\frac{\pi}{8}) \end{pmatrix}$$

y

$$D = \begin{pmatrix} 1 + 2x^2 + y^2 & 0 \\ 0 & 1 + x^2 + 2y^2 \end{pmatrix}$$

$$u = \sin(\pi x)\sin(\pi y).$$

Ejemplos Numéricos

- Tercer ejemplo.

$$K(x,y) = P^T DP,$$

con

$$P = \begin{pmatrix} cos(\frac{\pi}{4}) & sin(\frac{\pi}{4}) \\ -sin(\frac{\pi}{4}) & cos(\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix}$$

y

$$D = \begin{pmatrix} 1 + 2x^2 + y^2 + y^5 & 0 \\ 0 & 1 + x^2 + 2y^2 + x^3 \end{pmatrix}$$

$$u = \sin(\pi x)\sin(\pi y).$$

Resultados ejemplo 1

Malla	$\|err_h\|_2$	Orden	$\|err_d\|_2$	Orden
ENG21ABL	2.07E-03		2.3550E-03	
ENG41ABL	5.22E-04	1.99	5.1500E-04	2.19
ENG61ABL	2.96E-04	1.4	2.2000E-04	2.1
ENG81ABL	1.40E-04	2.61	1.0500E-04	2.57
ENG21SB	3.53E-03		3.1100E-03	
ENG41SB	8.01E-04	2.14	6.9500E-04	2.16
ENG61SB	5.69E-04	0.84	3.7500E-04	1.52
ENG81SB	1.62E-04	4.37	1.3000E-04	3.68
MIC21ABL	2.9043E-03		5.6989E-03	
MIC41ABL	1.0023E-03	1.53	1.7975E-03	1.66
MIC61ABL	4.7490E-04	1.84	7.2443E-04	2.24
MIC81ABL	3.1588E-04	1.42	3.9441E-04	2.11

Problema 1

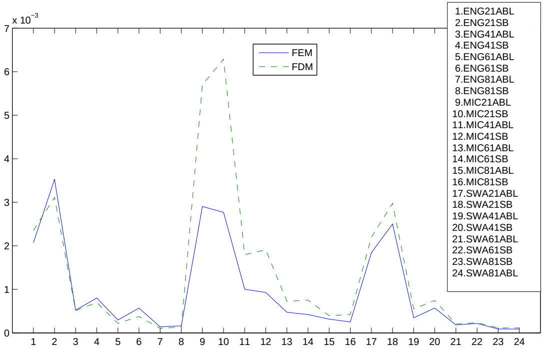


Figura: FEM vs FDM

- El error con la norma Euclidiana para el problema 1.

Resultados ejemplo 2

Malla	$\|err_h\|_2$	Order	$\|err_d\|_2$	Order
ENG21ABL	6.9547E-04		7.6023E-04	
ENG41ABL	1.7071E-04	2.03	1.8175E-04	2.06
ENG61ABL	1.1566E-04	0.96	8.6300E-05	1.84
ENG81ABL	4.4666E-05	3.31	3.7020E-05	2.94
ENG21SB	1.1396E-03		1.1494E-03	
ENG41SB	3.5121E-04	1.7	2.8869E-04	1.99
ENG61SB	2.6983E-04	0.65	1.6175E-04	1.43
ENG81SB	7.0681E-05	4.66	5.3720E-05	3.83
MIC21ABL	3.9202E-04		7.5700E-04	
MIC41ABL	1.3282E-04	1.56	1.9205E-04	1.98
MIC61ABL	6.0015E-05	1.96	8.6290E-05	1.97
MIC81ABL	5.4259E-05	0.35	5.3790E-05	1.64

Problema 2

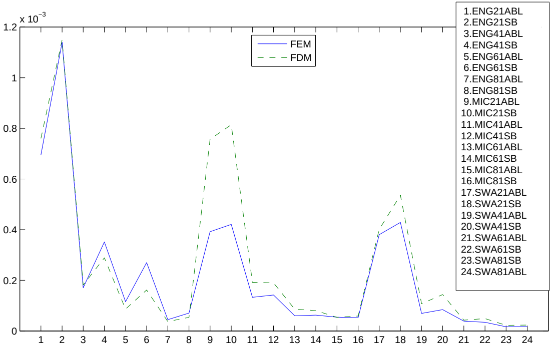


Figura: FEM vs FDM

- El error con la norma Euclidiana para el problema 2.

Resultados ejemplo 3

Malla	$\|err_h\|_2$	Order	$\|err_d\|_2$	Order
ENG21ABL	6.8090E-04		7.6190E-04	
ENG41ABL	1.6931E-04	2.01	1.7848E-04	2.09
ENG61ABL	1.1701E-04	0.91	8.4420E-05	1.85
ENG81ABL	4.4875E-05	3.33	3.6420E-05	2.92
ENG21SB	1.1215E-03		1.1405E-03	
ENG41SB	3.5395E-04	1.66	2.8187E-04	2.02
ENG61SB	2.7459E-04	0.63	1.5720E-04	1.44
ENG81SB	7.2275E-05	4.64	5.2730E-05	3.8
MIC21ABL	3.9890E-04		7.8834E-04	
MIC41ABL	1.3599E-04	1.55	2.0160E-04	1.97
MIC61ABL	6.2822E-05	1.9	8.6330E-05	2.09
MIC81ABL	5.6941E-05	0.34	5.4550E-05	1.6

Problema 3

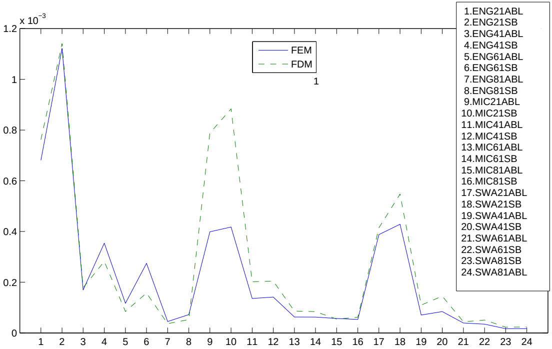


Figura: FEM vs FDM

- El error con la norma Euclidiana para el problema 3.

Conclusiones

- Se tienen resultados satisfactorios aplicando diferencias finitas.
- Es del mismo orden que con el esquema en elemento finito.
- Se trabaja con esquemas sencillos.

Contacto

- Francisco Javier Domínguez Mota dmota@umich.mx
- José Gerardo Tinoco Ruiz jtinoco@fismat.umich.mx
- Mario Enrique Equihua Tinoco marioeetinoco@gmail.com
- Sanzon Mendoza Armenta sanzon@fismat.umich.mx

Gracias...