

# Suavizamiento de contornos

## Una técnica para la reducción de puntos

Romualdo Mariano Matias  
Universidad Autónoma de la Ciudad de México

Pablo Barrera Sánchez, Guilmer González  
Facultad de Ciencias - UNAM

Congreso de la Sociedad Matemática Mexicana  
Octubre de 2009

- ▶ Objetivo de la plática
- ▶ ¿Qué es un contorno?
- ▶ Formulación matemática del problema
- ▶ Puntos Dominantes
  - ▶ Curvatura máxima
  - ▶ Colinealidad (Distancia ortogonal)
- ▶ Comentarios finales

## Objetivo de la plática

Dada una región plana irregular, queremos obtener un contorno similar más suave (que la información sea más compacta).



Para esto se construirá una poligonal que cumpla:

- 1) Aproxime al contorno original
- 2) Respete la forma de la curva
- 3) Reduzca la cantidad de puntos



└ ¿Qué es un contorno?

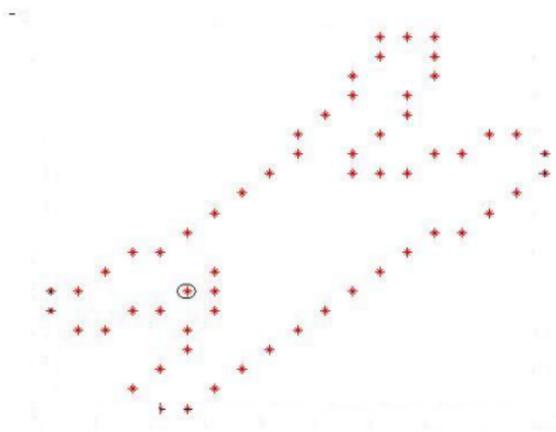
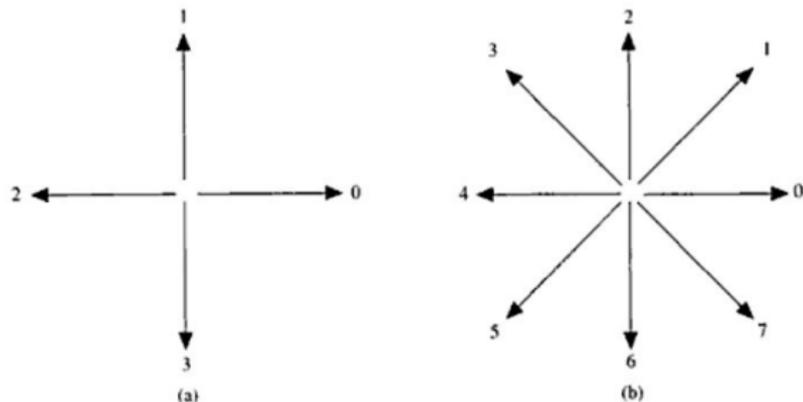


Figura: Contorno discreto del cromosoma

└ ¿Qué es un contorno?

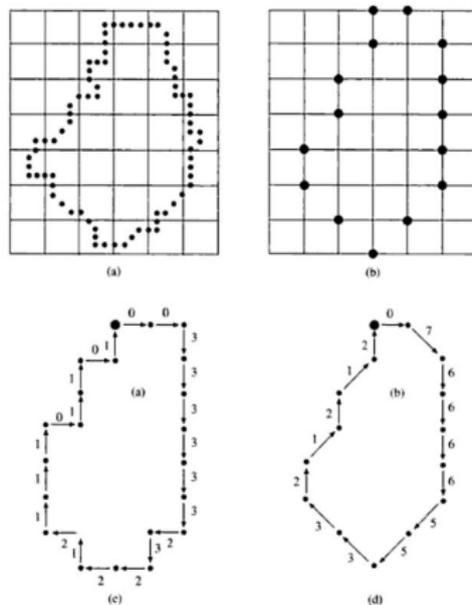
## Qué es un código de cadena?

Los códigos de cadena se utilizan para representar un contorno por medio de una sucesión conexas de segmentos de longitud y dirección especificadas.



Direcciones de: (a) código de cadena de 4 direcciones y (b) código de cadenas de 8 direcciones.

└ ¿Qué es un contorno?



**Figura:** (a) contorno digital con el cuadrículado de remuestreo superpuesto; (b) resultado del remuestreo; (c) código de cadena de 4 direcciones; (d) código de cadena de 8 direcciones

## Formulación del problema

Sea

$$C = \{p_i = (x_i, y_i), i = 1, \dots, m, P_{m+1} = P_1\}$$

una poligonal cerrada de  $m$ -puntos ordenados que la describen.

El problema es encontrar una colección de  $n$ -puntos

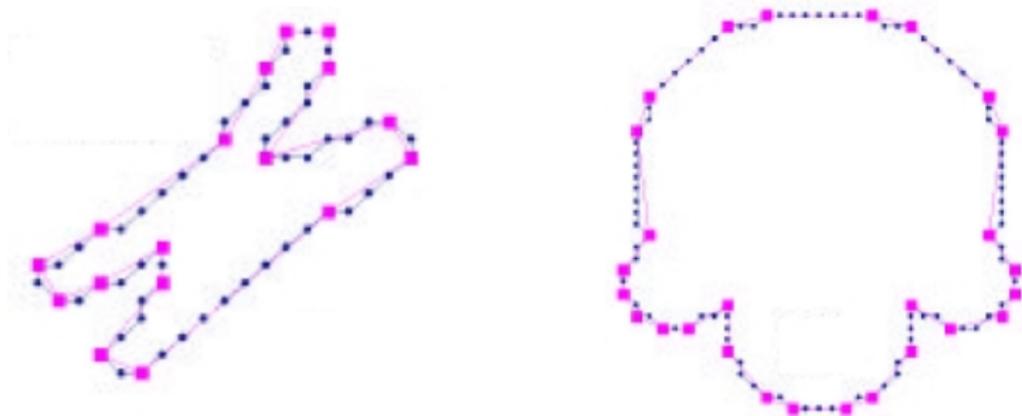
$$C' = \{P'_i = (x'_i, y'_i), i = 1, \dots, n\}$$

de manera que

- 1)  $n$  es significativamente más pequeño que  $m$ .
- 2) Los vértices de  $C'$  son un subconjunto ordenado de  $C$ .
- 3) los contornos son **muy parecidos**

## Puntos dominantes

Diremos que un conjunto de puntos son dominantes de un contorno, si es posible reconstruir adecuadamente el contorno con esos puntos



Los puntos dominantes serán los vértices del nuevo contorno.

En el trabajo que discutiremos, presentaremos dos técnicas heurísticas para detectarlos.

- ▶ Curvatura máxima
- ▶ Colinealidad por distancia ortogonal

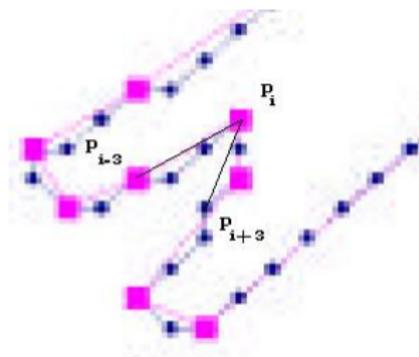


└ Puntos dominantes, curvatura máxima

└ curvatura máxima

Para cada  $P_i$  calculamos el coseno del ángulo, entre el punto y los  $k$ -subsecuentes

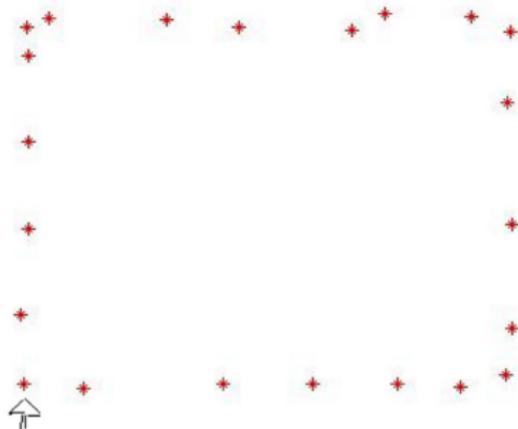
$$\cos_{ij} = \cos(\overrightarrow{P_i P_{i+j}}, \overrightarrow{P_i P_{i-j}}), \quad j = 1, \dots, k$$



└ Puntos dominantes, curvatura máxima

└ curvatura máxima

Tomemos un cuadrado formado por puntos con ruido como se muestra en la figura de abajo



└ Puntos dominantes, curvatura máxima

└ curvatura máxima

Usando  $k = 3$ , calculemos los  $k$ -cosenos de cada punto

$cos_1$	$cos_2$	$cos_3$
-0,1157	0,0155	-0,0100
-0,9934	-0,5169	-0,2379
-0,9994	-1,0000	-0,9127
-1,0000	-0,9999	-0,9981
-0,9993	-0,9956	-0,8408
-0,9416	-0,5532	-0,2407
-0,3983	-0,0935	-0,0464
-0,9946	-0,5276	-0,3419
-0,9995	-0,9706	-0,8013
-0,9979	-0,9535	-0,5941
-0,4532	-0,1899	-0,0045
-0,8881	0,0127	-0,0360
-0,8178	-0,6417	-0,3867
-0,8092	-0,9981	-0,8795
-0,9961	-0,9924	-0,9997
-0,9939	-0,9994	-0,9509
-0,8761	-0,3370	-0,1411
-0,4269	0,0105	0,0206
-0,9991	-0,3243	-0,1955
-1,0000	-0,9951	-0,7655
-0,9984	-0,9998	0,9972
-0,9959	1,0000	1,0000
-0,1157	0,0155	0,0100

└ Puntos dominantes, curvatura máxima

└ curvatura máxima

## Región de soporte

Identificamos  $h_i$  donde ocurre un cambio de orden de crecimiento

$$\text{COS}_{ik} < \text{COS}_{i,k-1} < \dots < \text{COS}_{i,h_i} \geq \text{COS}_{i,h_i-1} .$$

└ Puntos dominantes, curvatura máxima

└ curvatura máxima

## Curvatura máxima para cada punto y su radio de soporte

$p_i$	Valor máximo del coseno	$h_i$
1	0,0155	2
2	-0,2379	3
3	-0,9127	3
4	0,9981	3
5	-0,8408	3
6	-0,2407	3
7	-0,0464	3
8	-0,3419	3
9	-0,8013	3
10	-0,5941	3
11	-0,0045	3
12	0,0127	2
13	-0,3867	3
14	-0,8795	3
15	-0,9924	2
16	-0,9509	3
17	-0,1411	3
18	0,0206	3
19	-0,1955	3
20	-0,7655	3
21	0,9972	3
22	1,0000	3
23	0,0155	2

- └ Puntos dominantes, curvatura máxima
- └ curvatura máxima

## Puntos dominantes

Los puntos  $P_i$  donde  $\cos_{i,h_i} \geq \cos_{j,h_j}$  para todo  $j$  tal que  $|i - j| \leq \frac{h_i}{2}$  serán de curvatura máxima. Esos son serán los puntos dominantes.

- └ Puntos dominantes, curvatura máxima
- └ curvatura máxima

## Ejemplos

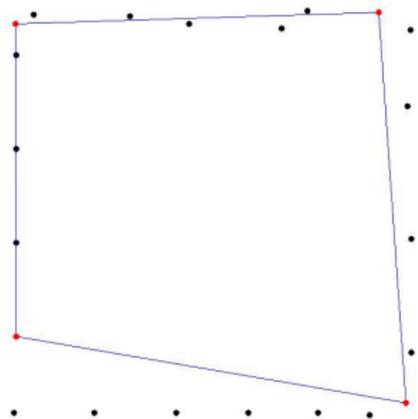


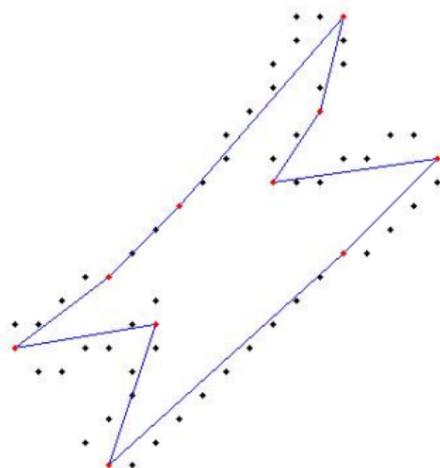
Figura: Contorno con 22 originales, para  $k = 2$ , se obtuvieron 4

└ Puntos dominantes, curvatura máxima

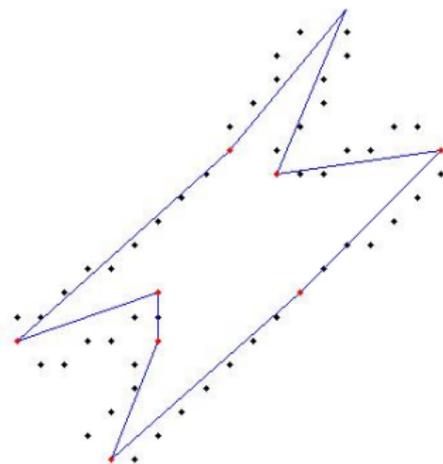
└ curvatura máxima

## Ejemplos

Cromosoma con 60 puntos originales,



para  $k = 3$ , tenemos 10 puntos dominantes.



para  $k = 6$ , tenemos 9 puntos dominantes.





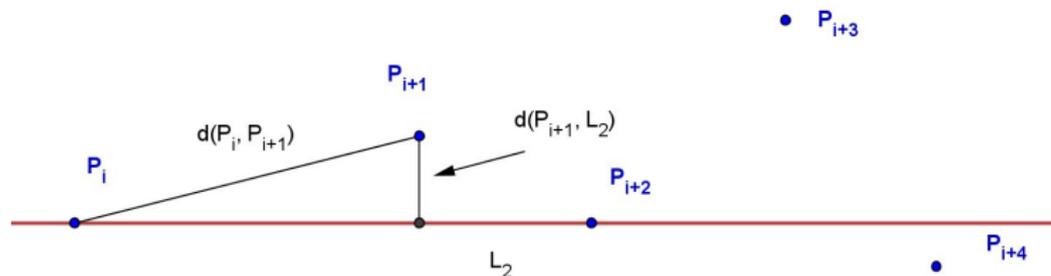
## Criterio de distancia ortogonal (Ray & Ray)

Tomando  $P_i$  calculamos

$$F_1 = d(P_i, P_{i+1}).$$

Formamos la recta  $\mathcal{L}_2$  que pasa por  $P_i$  a  $P_{i+2}$  y calculamos la distancia de  $P_{i+1}$  a la recta  $\mathcal{L}_2$  y hacemos

$$F_2 = d(P_i, P_{i+2}) - d(P_{i+1}, \mathcal{L}_2)$$

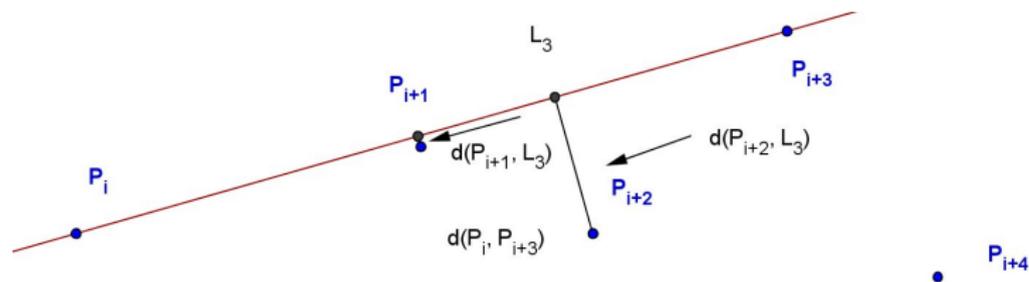


y si  $F_2 > F_1$  continuamos.

## Criterio de distancia ortogonal (Ray & Ray)

Formamos la recta  $\mathcal{L}_3$  que pasa por  $P_i$  a  $P_{i+3}$  y calculamos la distancia de  $P_{i+1}$  a la recta  $\mathcal{L}_3$  y la distancia de  $P_{i+2}$  a la recta  $\mathcal{L}_3$ , y hacemos

$$F_3 = d(P_i, P_{i+3}) - d(P_{i+1}, \mathcal{L}_3) - d(P_{i+2}, \mathcal{L}_3)$$

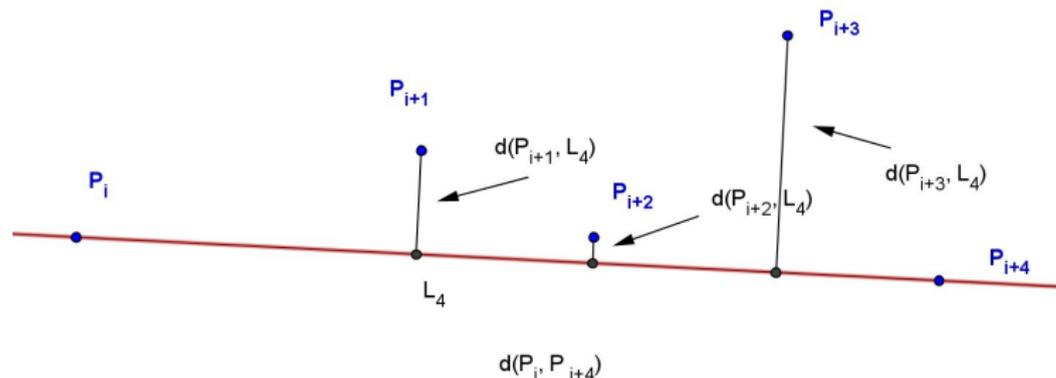


y si  $F_3 > F_2$  continuamos.

## Criterio de distancia ortogonal (Ray & Ray)

Formamos la recta  $\mathcal{L}_4$  que pasa por  $P_i$  a  $P_{i+4}$  y calculamos la distancia de  $P_{i+1}$  a la recta  $\mathcal{L}_4$ , la distancia de  $P_{i+2}$  a la recta  $\mathcal{L}_4$ , y la distancia de  $P_{i+3}$  a la recta  $\mathcal{L}_4$  y hacemos

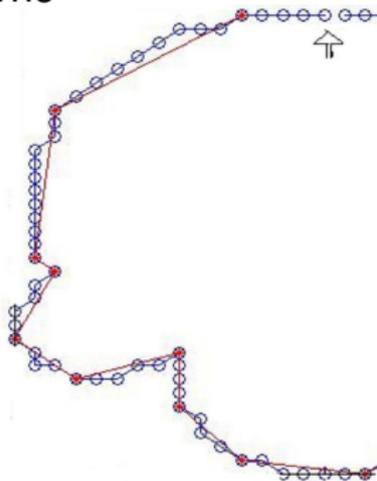
$$F_4 = d(P_i, P_{i+4}) - d(P_{i+1}, \mathcal{L}_4) - d(P_{i+2}, \mathcal{L}_4) - d(P_{i+3}, \mathcal{L}_4)$$



y si  $F_4 < F_3$ , entonces  $P_{i+3}$  es un **posible punto dominante**.

## Criterio de distancia ortogonal (Ray & Ray)

El punto  $P_{i+3}$  ahora será nuestro nuevo punto de referencia, y aplicamos el procedimiento anterior a partir de éste punto y en la dirección del contorno

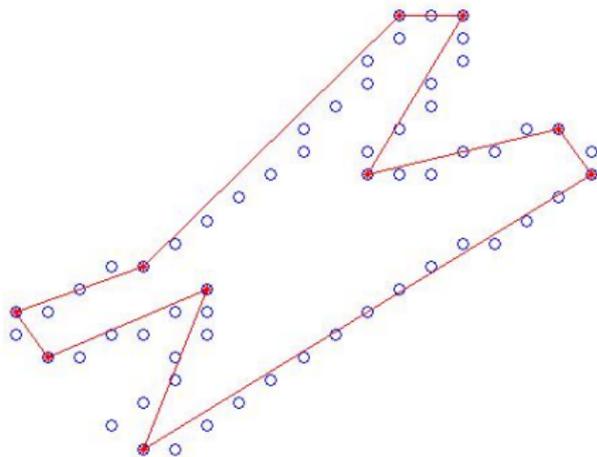




└ Puntos dominantes, colinealidad

└ Colinealidad

## Ejemplo

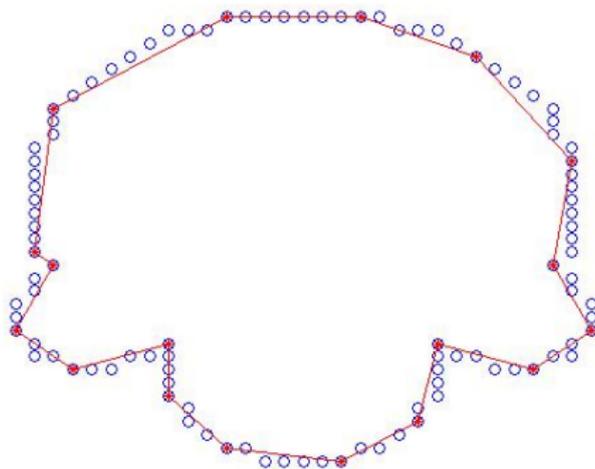


60 puntos originales, 10 puntos dominantes.

└ Puntos dominantes, colinealidad

└ Colinealidad

## Ejemplo



102 puntos originales, 18 puntos dominantes.

## Crítica al algoritmo

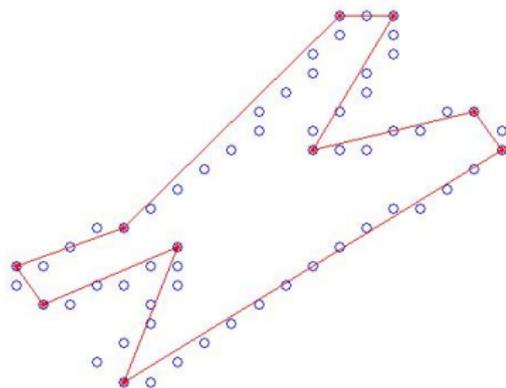
- 1) Este algoritmo es dependiente del punto de inicio
- 2) y dependiente de la dirección.
- 3) Podemos controlar el efecto de las distancias ortogonales:

$$F_k = d(P_i, P_{i+k+1}) - \omega * \sum_{j=1}^{k-1} d(P_{i+j}, \mathcal{L}_{k+1})$$

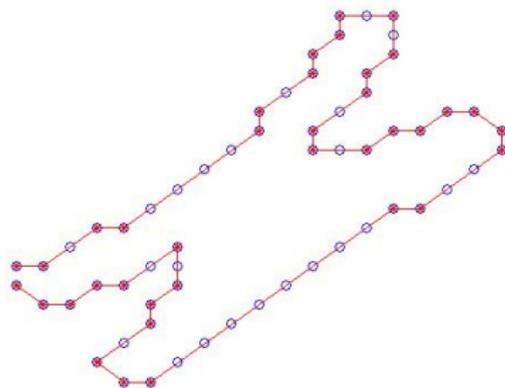
con  $\omega$  adecuado.

## Ejemplos

Cromosoma con 60 puntos originales,



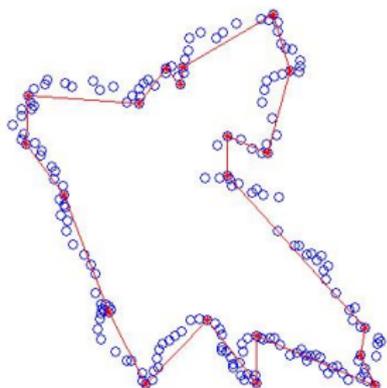
para  $w = 1$ , tenemos 10 puntos dominantes.



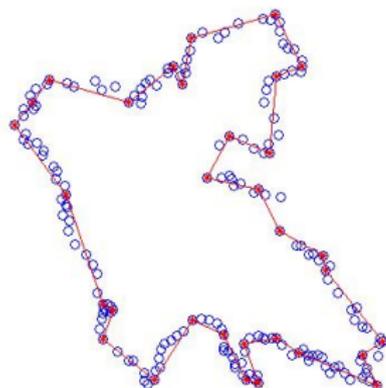
para  $w = 10$ , tenemos 37 puntos dominantes.

## Ejemplos

Valle de Bravo con 190 puntos originales,



para  $w = 1$ , tenemos 20 puntos dominantes.



para  $w = 10$ , tenemos 34 puntos dominantes.

## Comentarios finales y trabajo en curso

- 1) Estos algoritmos son tomados de un problema de segmentación de imágenes, deben ser adaptados a contornos de regiones planas.
- 2) Para la primera técnica
  - a) Experimentar con el orden  $k$  de la vecindad de estudio.
  - b) Comparar los promedios de los cosenos.
- 3) Para la segunda técnica
  - a) Es dependiente del punto de inicio y la dirección que se elija.
  - b) Un peso  $w$  adecuado nos permitiría ajustar el criterio a secciones del contorno.
- 4) Nuestros objetivos son experimentar con otras técnicas.
- 5) Desarrollar un módulo en Matlab con técnicas de puntos dominantes para la remoción de puntos.

# Gracias!!!

Más información,

[www.fciencias.unam.mx/computocientifico](http://www.fciencias.unam.mx/computocientifico)

