

# Un sistema experimental para generar mallas no-estructuradas en regiones planas irregulares.

Luis Carlos Velázquez Guerrero

Facultad de Ciencias, UNAM

30-Jun-09

# Dedicatoria

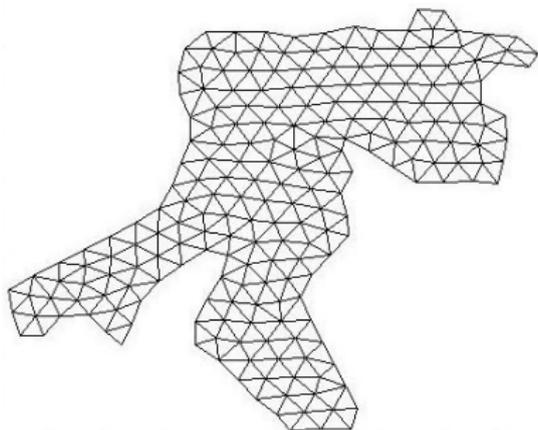
Ing. Carlos A. Velazquez Fuentes  
Elizabeth Guerrero Sanchez

A mis padres, por todo lo que implica hacer mi familia.

Hoy vengo en representación de mis hermanos.

## Objetivo central

Mostrar un método efectivo para generar mallas de **calidad** en regiones irregulares planas.

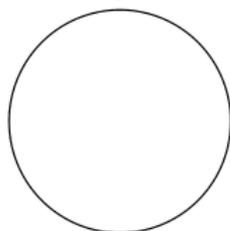


Malla de calidad: Bahía de La Habana, Cuba

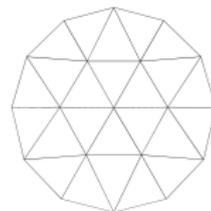
# Per-Olof Persson, 2005

## Publica **DistMesh** - A Simple Mesh Generator in MATLAB

Región



Malla generada por DistMesh



Región



Malla generada por DistMesh



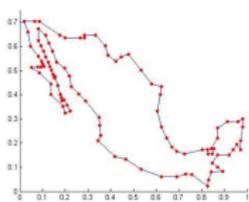
Para la generación de mallas **DistMesh** trata de optimizar la posición de los nodos usando un procedimiento de suavizamiento basado en fuerzas.

El proceso iterativo en general da como resultado mallas con buena forma.

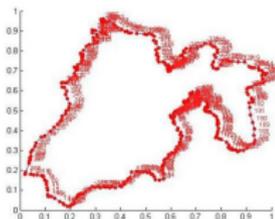
# Regiones irregulares planas

Regiones simplemente conexas, poligonales con geometría complicada.

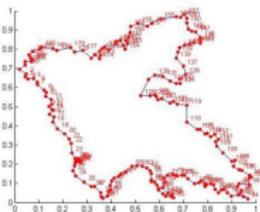
México



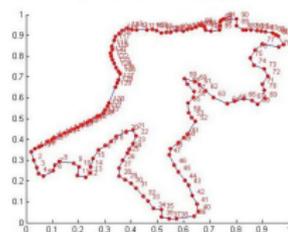
Edo. de México



Presa de Valle de Bravo



Bahía de la Habana



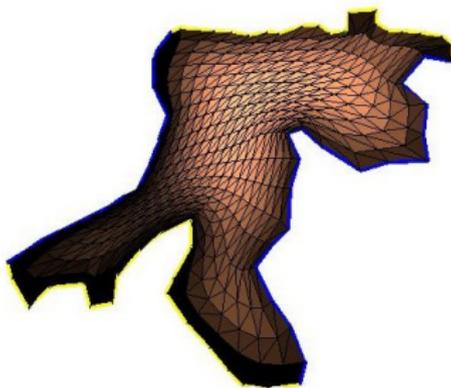
# Método de Elemento Finito

Una malla puede usarse para resolver numericamente una EDP's con condiciones a la frontera.

En regiones de geometría complicada, los métodos analíticos no son útiles para resolverlo.

Laplaciano con condiciones de Dirichlet

$$\begin{cases} \nabla^2 f(x, y) = 1 \\ f(x, y) = 0 \end{cases} \quad \text{para } (x, y) \in \partial\Omega$$

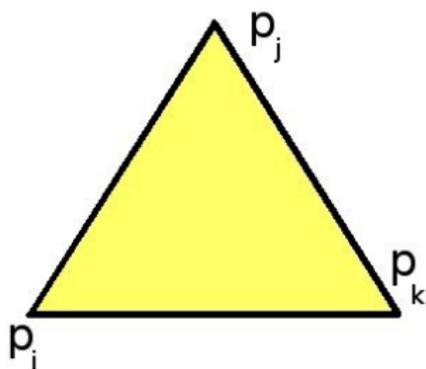


¿Cómo sabemos cuando una triangulación es buena?

### Cualidad óptima

$$\|p_i - p_j\| \approx \|p_j - p_k\| \approx \|p_k - p_i\|$$

para todo  $\Delta_{ijk} \in T$



$\Delta_s \approx$  equiláteros



## Medida de calidad Topológica

¿Qué tanto difiere la malla de tener todos los nodos interiores de grado seis?

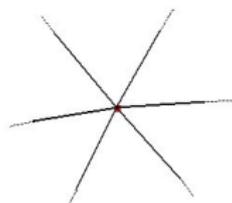
$$\varepsilon_t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\delta_i - 6|,$$

$\delta_i$  Grado del  $i$ -ésimo nodo.

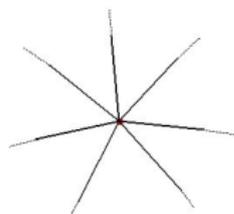
$n$  Numero de nodos interiores.



Nodo de grado cinco



Nodo de grado seis



Nodo de grado siete

# Medida de calidad Geométrica

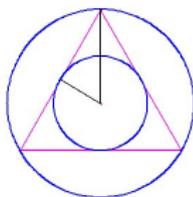
¿Cuanto difieren malla de tener las cualidades geométricas de los triángulos equiláteros?

$$\varepsilon_g = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left( 1/2 - \frac{r_i}{R_i} \right),$$

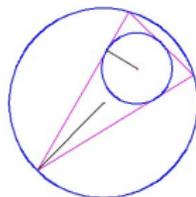
$r_i$  Inradio del  $i$ -esimo elemento.

$R_i$  Circunradio del  $i$ -esimo elemento.

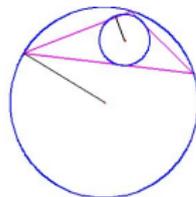
$m$  Numero de elementos de la malla.



$$\frac{r_i}{R_i} = 1/2$$



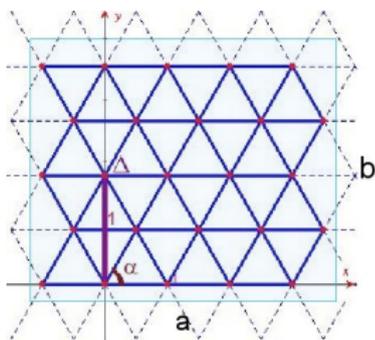
$$\frac{r_i}{R_i} < 1/2$$



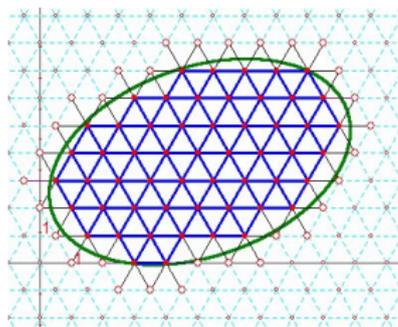
$$\frac{r_i}{R_i} < 1/2$$

## Basado en rejilla regular de parámetro $h$

Una triangulación que tenga la mejor calidad posible puede fácilmente estar contenida en la región  $\Omega$ .



Rejilla regular



Triangulación

Con este tipo de triangulaciones no se garantiza que la región sea cubierta.

# Problema de optimización

## IDEA

Partiendo de un triangulación  $T = \{\Delta_i\}$  que cumpla que

$$\Omega_h = \bigcup \Delta_i \subset \Omega$$

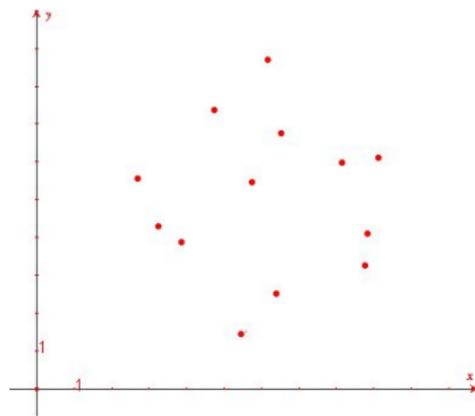
se desea generar una triangulación  $T^* = \{\Delta_i^*\}$  de  $\Omega$  de tal forma que si  $\Delta_{ijk} = \Delta(P_i, P_j, P_k)$  es uno de los triangulos, entonces  $\|p_i - p_j\| \approx \|p_j - p_k\| \approx \|p_k - p_i\|$ .

## Enfoque basado en conexión de nodos

Enfoque de solución secuencial de dos problemas

### Metodología

- 1 Colocar un conjunto de vértices de triángulo  $S$ .
- 2 Dotar a  $S$  de una estructura de adyacencia  $G(S)$  para generar una triangulación  $T$ .

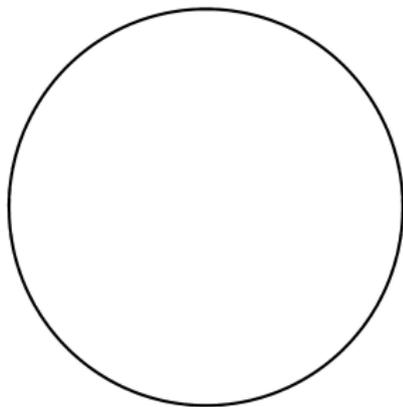


Colección de Nodo  $S_0$



## Regiones relativamente simples

Regiones cuya frontera puede ser descrita de forma implícita.

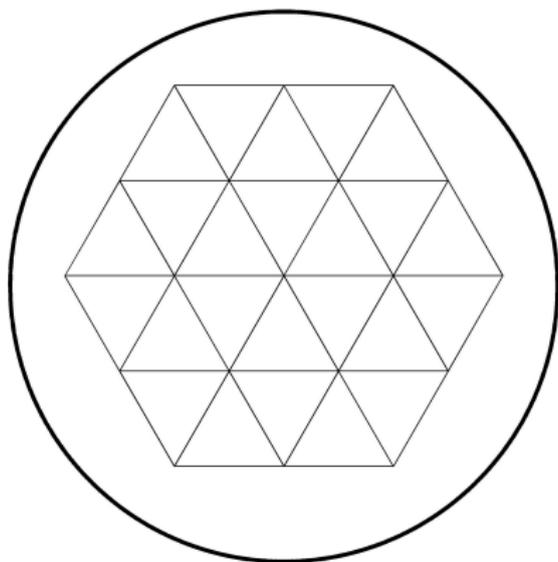


Circunferencia



Región delimitada por 2 funciones

# Ejemplo



Punto de partida para el ajuste,  $T^*(S)$

## Ajuste a la región

Minimizar la franja hueco  $\Omega \setminus T|_{\Omega}^*$ .

Reubicando los partículas

$$\widehat{S} = \{p_i + \delta \mid p_i \in S\}.$$

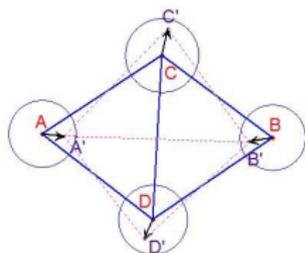
Para un ajuste de buena calidad es conveniente no mantener la estructura  $G$  una vez repocionadas las partículas  $\widehat{S}$ .

Un método para el problema de ajuste

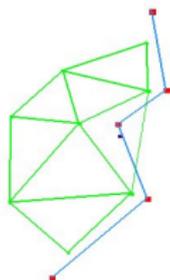
Se plantea un método iterativo.

Partiendo de  $T|_{\Omega}^*(S_k)$  se calculan

- 1  $T^*(S_{k+1})$
- 2  $T|_{\Omega}^*(S_{k+1}) = \{\Delta \in T^* | \text{baricentro}(\Delta) \in \Omega\}$

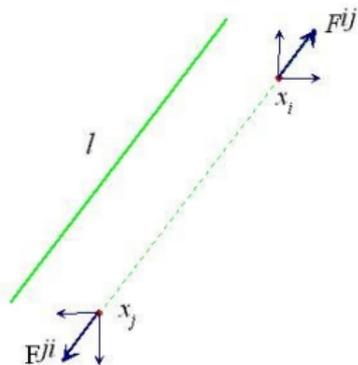


$$\nabla G = G(k+1) - G(k)$$



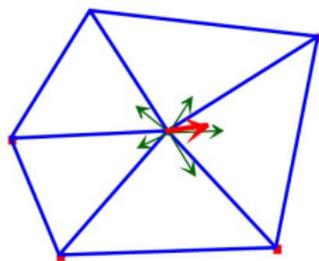
Criterio  $\Delta_i \subset \Omega$

## Fuerza de repulsión $F(\bar{x})$



Fuerza de repulsión entre partículas,

$$l = l_G^*$$



Fuerza resultante para la  $i$ -ésima partícula



## Ecuación diferencial de equilibrio de fuerzas

### El problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = F(\bar{x}) + C(\bar{x}) & 0 < t \\ \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0. \end{cases}$$

### Solución de equilibrio

Si  $S$  es tal que  $F(S) = 0$  entonces para la partícula  $i$  se tiene que  $\sum_{j \in N^i} F^{ij} = 0$ .

Las mallas suaves son un caso usual de triangulaciones en equilibrio de fuerzas  $T^* |_{\Omega} (S)$

## Integración numérica de la ecuación

### Método de Euler hacia adelante

$$\bar{x}(t + \Delta t) = \bar{x}(t) + \Delta t \cdot (F(\bar{x}) + C(\bar{x}))$$

### Implementación numérica

Para cada nodo se realiza el siguiente avance

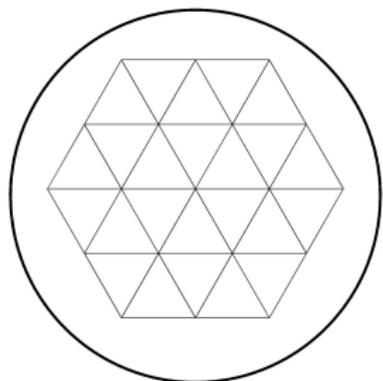
$$\bar{x}_i \leftarrow \bar{x}_i + \Delta t \cdot F_i(\bar{x})$$

Si  $\bar{x}_i$  es fijo, hacer

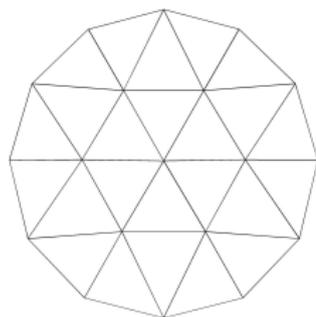
$$\cdot \quad \bar{x}_i \leftarrow \bar{x}_i - \Delta t \cdot F_i(\bar{x})$$

Si  $\bar{x}_i \notin \Omega$ , hacer

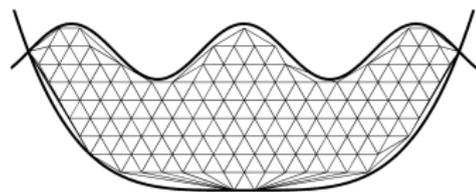
$$\cdot \quad \bar{x}_i \leftarrow \bar{x}_i + C_i(\bar{x})$$



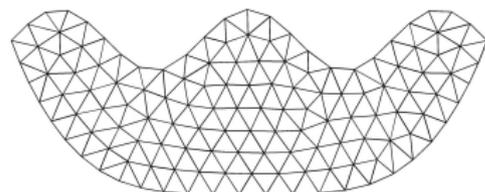
$T^* |_{\Omega} (S_0)$



$T^* |_{\Omega} (S^*)$



$T^* |_{\Omega} (S_0)$

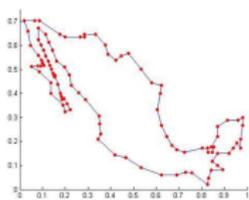


$T^* |_{\Omega} (S^*)$

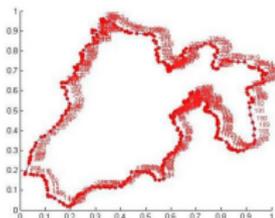
## Regiones irregulares planas

Regiones simplemente conexas, poligonales con gran irregularidad en su geometría.

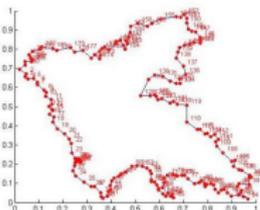
México



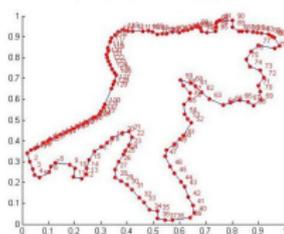
Edo. de México



Presa de Valle de Bravo

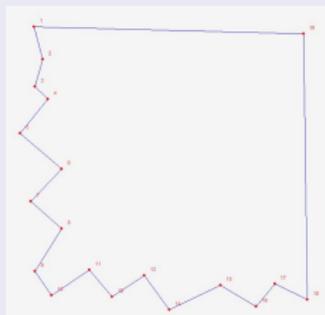


Bahía de la Habana

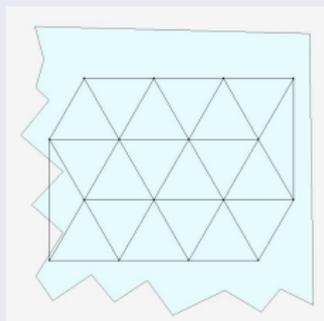


# Origen del problema

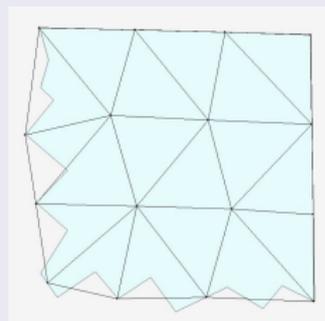
## Ejemplo



$\partial\Omega$  Polígono irregular inicial



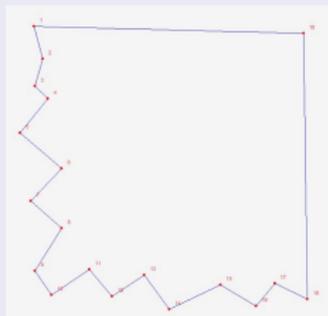
$T^* |_{\Omega} (S_0)$



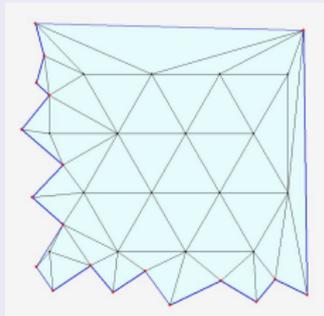
$T^* |_{\Omega} (S^*)$

$$S_0 = \partial\Omega \cup S$$

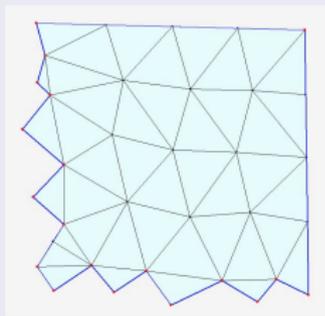
## Ejemplo



$\partial\Omega$  Polígono inicial



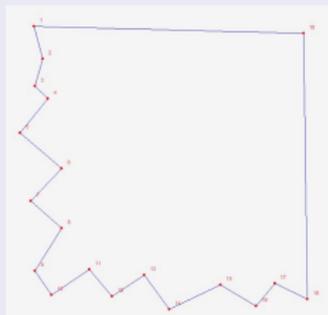
$T^*|_{\Omega}(S_0)$



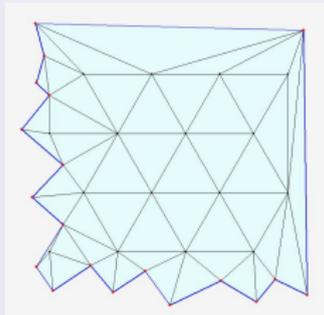
$T^*|_{\Omega}(S^*)$

# Eliminación de nodos interiores, $S^{[k]}$ dinámico

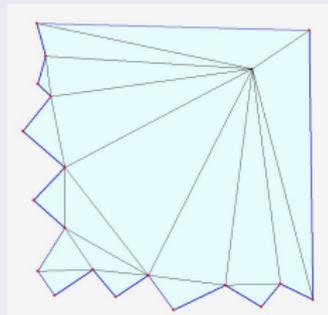
## Ejemplo



$\partial\Omega$  Polígono inicial



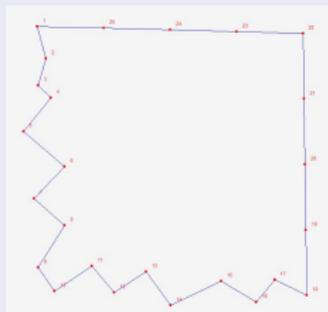
$T^* |_{\Omega} (S_0)$



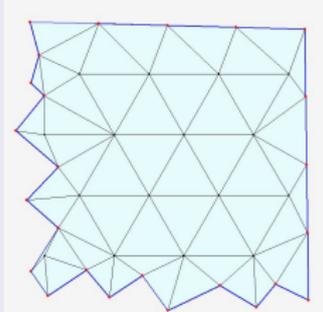
$T^* |_{\Omega} (S^*)$



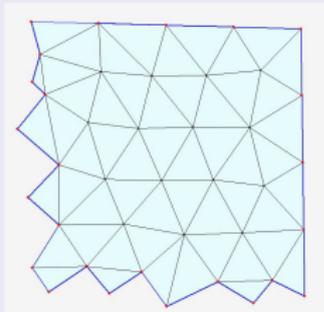
## Ejemplo



$\partial\Omega$ , Polígono inicial



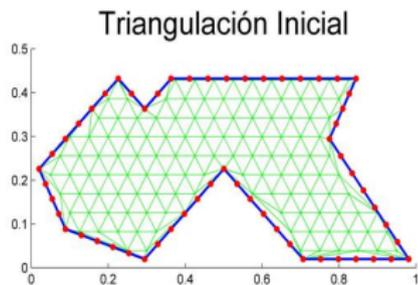
$T^* |_{\Omega} (S_0)$



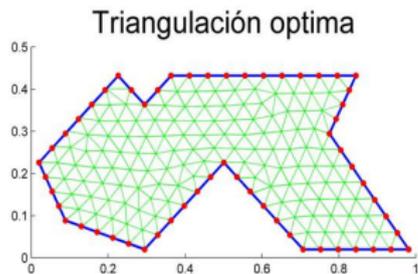
$T^* |_{\Omega} (S^*)$

Otro ejemplo, problema de ajuste resuelto por tratamiento 1

## Ejemplo con $S^{[k]}$ dinámico



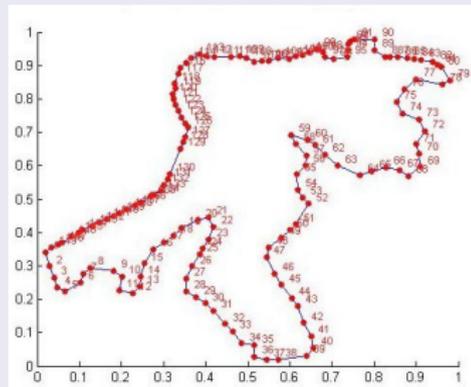
$T^* |_{\Omega} (S_0)$  Malla inicial



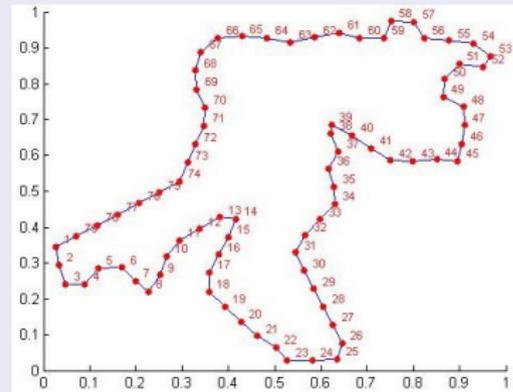
$T^* |_{\Omega} (S^*)$  Malla óptima

## Regiones más generales

### Suavizamiento de spline cónico



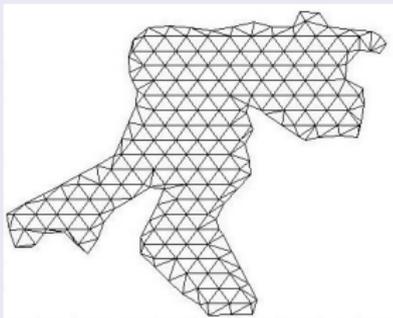
Polígono  $P$



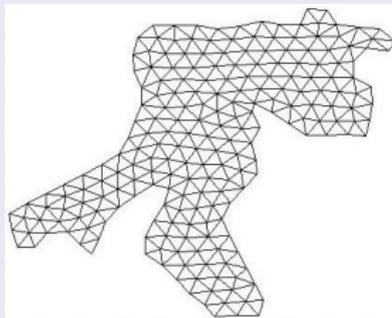
Polígono  $Q = CS(P)$

## Malla generada por tratamiento 2

### Triangulación de la Bahía de la Habana



$T^* |_{\Omega} (S_0)$



$T^* |_{\Omega} (S^*)$

# Presentación del Sistema Unamesh



**Unamesh**

Un sistema experimental para generar mallas suaves en regiones irregulares.

Implementando el método de equilibrio de fuerzas.

