# Propiedades matemáticas de las pompas de jabón

J. Jesús Haro Frausto

Departamento de Físico-Matemáticas, UASLP

25-Marzo-2009

# Motivación

La belleza de las burbujas y las membranas de jabón ha tenido un atractivo para chicos y grandes desde siempre.

Niños jugando.

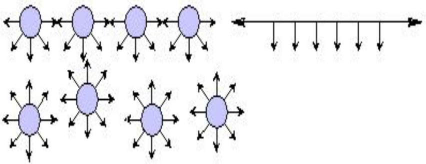
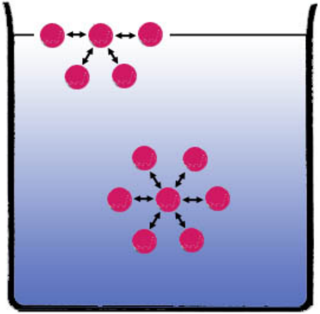


Figure 2 - Scheme of the actractive forces among the molecules of a liquid. The inner molecules are in equilibrium among them. Instead, the forces which act on the molecules of surface do not are balanced upward and from this originates an inward compression. Besides, the cohesion among the molecules determines a tension tangential to the surface. So, the surface of a fluid behaves like an elastic membrane.

Tensión superficial

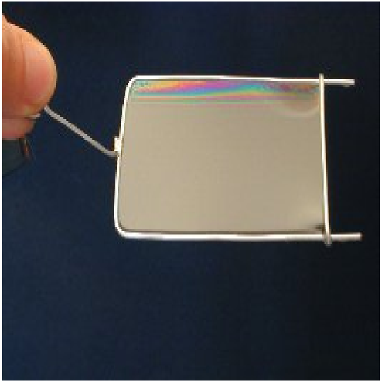
La tensión superficial tiende a minimizar el área de la superficie que separa dos fluidos de diferente densidad, y ese fenómeno se presenta con las membranas de jabón.



Una aplicación interesante es el estudio de la tensión superficial que le permite desplazarse al patinador:


Un insecto patinando.

Si $w$ es la longitud del alambre deslizante, puesto que la película tiene dos superficies, la longitud total a lo largo de la cual actua la fuerza superficial es $2w$. La tensión superficial $\sigma$ en la película es $\sigma = F/2w$.



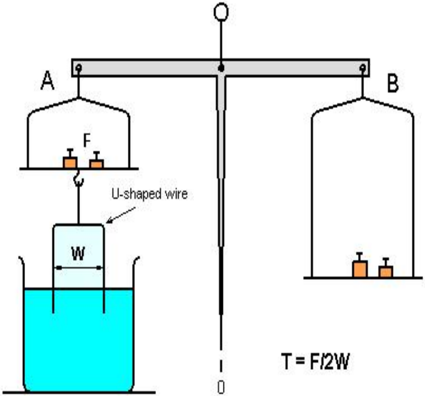



Figure 5 - Experimental device to measure the surface tension of a liquid.

Otro punto de vista útil en relación con los efectos de superficie es el siguiente: supongamos que el alambre de la figura es desplazado hacia la derecha una distancia $y$ mediante una fuerza $F$. El trabajo realizado es $Fy$, el área total de la superficie ha aumentado en $2wy$. Por tanto el trabajo realizado por unidad de área al aumentar ésta es:

$$\frac{\text{Trabajo}}{\text{incremento de área}} = \frac{T}{\delta A} = \frac{Fy}{2wy} = \frac{F}{2w} = \sigma$$

por lo tanto,

$$\text{Trabajo} = \sigma \delta A$$

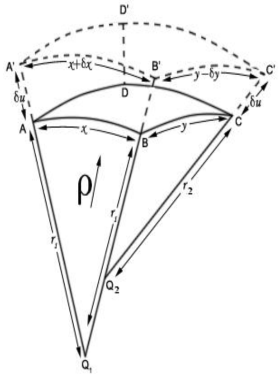
Apliquemos esto ahora a una expansión de una membrana.

# Expansión de una membrana

$$\begin{aligned} T &= \sigma\delta A \\ &= F \cdot D \\ &= \rho A \delta u \\ &= \rho x y \delta u \end{aligned}$$

de ahí tenemos la relación

$$\rho x y \delta u = \sigma \delta A$$

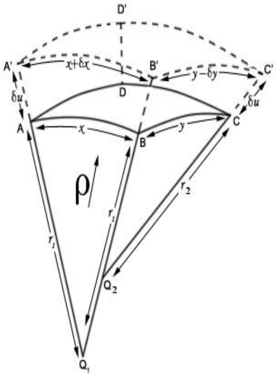


# Expansión de una membrana

$$
\begin{aligned}
\delta A &= (x+\delta x)(y+\delta y) - xy \\
\frac{x+\delta x}{r_1+\delta u} &= \frac{x}{r_1} \\
\frac{y+\delta y}{r_2+\delta u} &= \frac{y}{r_2} \\
\delta A &= xy(1+\frac{\delta u}{r_1})(1+\frac{\delta u}{r_2}) - xy
\end{aligned}
$$

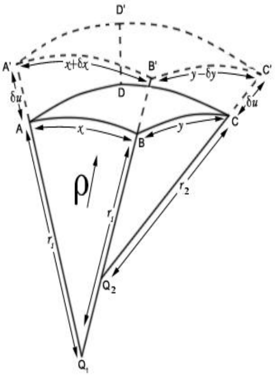
regresando a la relación anterior

$$\rho xy\delta u = \sigma xy\delta u(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2})$$

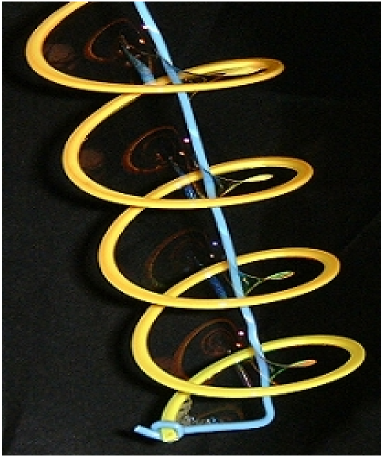


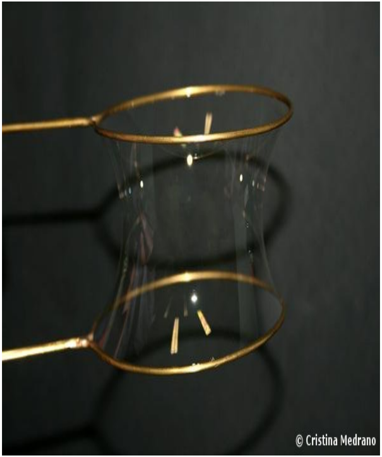
# Ecuación Laplace-Young

$$\rho = \sigma \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$$



# Dos ejemplos clásicos






*Dos superficies interesantes.*

# Curvatura media

Es una medida que nos permite identificar que tan doblada es una superficie.
Sea $\mathbf{x} : \mathcal{U} \mapsto \mathbf{R}^n$ una superficie paramétrica. La curvatura media se define como

$$2H = k_1 + k_2$$

donde $k_1$ y $k_2$ son las curvaturas principales.

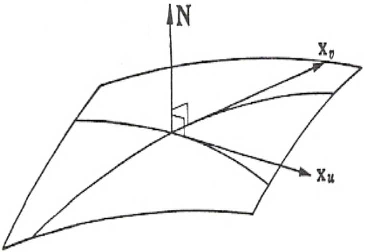
Desarrollando tenemos une expresión elemental

$$H = \frac{Gl + En - 2Fm}{2\left(EG - F^2\right)}$$

donde

$$E = \|\mathbf{x}_u\|^2, \quad F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v, \quad G = \|\mathbf{x}_v\|^2$$

y $l$, $n$ y $m$ son los coeficientes de la segunda forma fundamental de la superficie.



Para la Helicoide parametrizada por $\mathbf{x}(u,v) = (v\cos(u), v\sin(u), u)$, si calculamos su curvatura media obtenemos que

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = 1+u^2, \quad l = 0, \quad m = -\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}, \quad n = 0.$$

y sustituyendo en la fórmula respectiva nos queda

$$H = \frac{Gl + En - 2Fm}{2\left(EG - F^2\right)} = \frac{\left(1+u^2\right)(0) + (1)(0) - 2(0)\left(-\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\right)}{2\left((1)\left(1+u^2\right) - (0)^2\right)} = 0.$$

La Helicoide es una superficie que tiene curvatura media igual a cero. Lo mismo ocurre con la Catenoide.

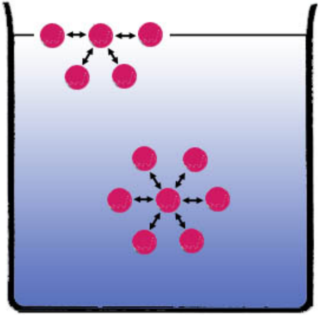
# Superficie mínima

## Idea Geométrica

Una superficie de mínima es aquella que tiene curvatura media igual a cero

$$H = 0$$

La tensión superficial tiende a minimizar el área de la superficie que separa dos fluidos de diferente densidad, y ese fenómeno se presenta con las membranas de jabón.



# Caracterización de la Superficie mínima

## Definición clásica

Sea $z = f(x, y)$ una función de dos variables, y tomemos una parametrización de Monge para su gráfica: $\mathbf{x}(u, v) = (u, v, f(u, v))$. Tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u &= (1, 0, f_u), & \mathbf{x}_{uu} &= (0, 0, f_{uu}), \\ \mathbf{x}_v &= (1, 0, f_v), & \mathbf{x}_{uv} &= (0, 0, f_{uv}), \\ & & \mathbf{x}_{vv} &= (0, 0, f_{vv}), \end{aligned}$$

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = (-f_u, -f_v, 1), \quad |\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v| = \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}$$

$$\begin{aligned} U &= \frac{(-f_u, -f_v, 1)}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}, & E &= 1 + f_u^2, & F &= f_u f_v, \\ G &= 1 + f_v^2, & l &= \frac{f uu}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}, & m &= \frac{f uv}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}, \\ n &= \frac{f vv}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}. \end{aligned}$$

# Superficie mínima

## Definición clásica

Sustituyendo los datos anteriores en la fórmula de la curvatura media *H* tenemos que

$$H = \frac{(1+f_v^2)f_{uu} + (1+f_u^2)f_{vv} - 2f_uf_vf_{uv}}{2(1+f_u^2+f_v^2)^{3/2}}.$$

De donde se concluye que una superficie *M es mínima sí y sólo si*

$$(1+f_v^2)f_{uu} + (1+f_u^2)f_{vv} - 2f_uf_vf_{uv} = 0.$$

# Superficie mínima

## Ejemplo: Primera superficie de Sherk

Si $z = f(x, y)$ es una funcion separable en las variables $x$ y $y$, en la forma $f(x, y) = g(x) + h(y)$ la ecuación de la superficie mínima se escribe como

$$g''(x)(1 + h'^2(y)) + h''(y)(1 + g'^2(x)) = 0.$$

agrupando adecuadamente, tenemos

$$-\frac{1 + g'^2(x)}{g''(x)} = \frac{1 + h'^2(y)}{h'^2(y)}.$$

es decir, son iguales a una constante $c$.

# Superficie mínima

## Ejemplo: Primera superficie de Sherk

La primera ecuación

$$1 + g'^2(x) = -cg''(x),$$

se puede ver como una ecuación diferencial ordinaria

$$1 + \phi^2 = -c\frac{d\phi}{dx}$$

haciendo el cambio $\phi = g'$. La solución es

$$g(x) = c \ln(\cos(x/c))$$

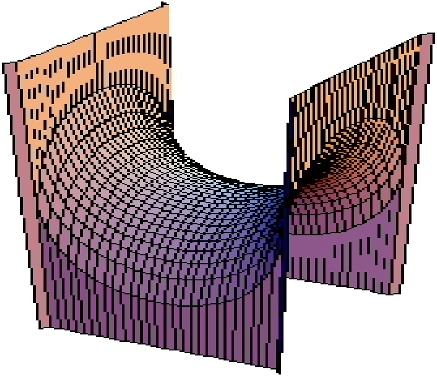
.

# Superficie mínima

## Ejemplo: Primera superficie de Sherk

Con esto la superficie se puede escribir como

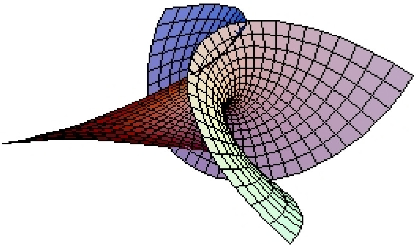
$$f(x,y) = c\ln(\cos(x/c)) - c\ln(\cos(y/c)) = c\ln\left(\frac{\cos(x/c)}{\cos(y/c)}\right).$$



# Superficie mínima

## Ejemplo: Superficie de Enneper

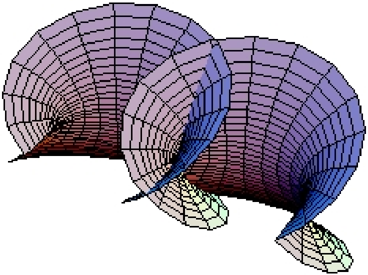
$$\mathbf{x}(u, v) = (u - u^3/3 + uv^2, v - v^3/3 + vu^2, u^2 - v^2).$$



# Superficie mínima

## Ejemplo: Superficie de Catalan

$$\mathbf{x}(u,v) = (u - \sin(u)\cosh(v), 1 - \cos(u)\cosh(v), 4\sin(u/2)\sinh(v/2)).$$

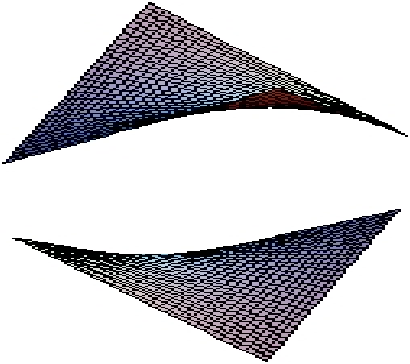


# Superficie mínima

## Ejemplo: Quinta superficie de Sherk

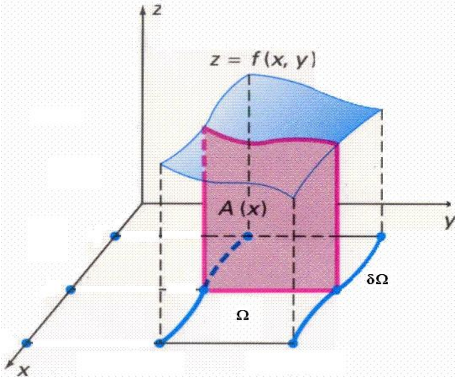
Esta superficie es escrita con frecuencia en forma no paramétrica sin $z = \sinh x \sinh y$. Paramétricamente,

$$\mathbf{x}(u, v) = (\arg\sinh(u), \arg\sinh(v), \arg\sinh(uv)).$$



# Relación entre Área mínima y superficie mínima

¿Una superficie de área mínima es superficie mínima?
Sea $M$ la gráfica de una función de dos variables $z = f(x, y)$ la cual es una superficie de área mínima definida sobre $\Omega$ y frontera $\partial\Omega$.



Ahora consideremos una superficie $g(x, y)$ definida sobre $\Omega$ y que sobre la frontera $\partial\Omega$ valga cero
Consideremos la familia de superficies ligeramente perturbadas de $M$ en la forma

$$M^t : z^t(x, y) = f(x, y) + tg(x, y).$$

La perturbación $tg(x, y)$ mueve los puntos de la gráfica original $M$ dentro del dominio $\Omega$, pero mantiene la curva sobre la $\partial\Omega$.

# Relación entre Área mínima y superficie mínima

Una parametrización de Monge para $M^t$ es

$$\mathbf{x}^t(u,v) = (u, v, f(u,v) + tg(u,v)).$$

Por la definición de área, vemos que el área de $M^t$ es

$$A(t) = \int_v \int_u u\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2 + 2t(f_u g_u + f_v g_v) + t^2(g_u^2 + g_v^2)}dudv.$$

Como $M$ tiene área mínima, $A(t)$ debe tener un mínimo en $t = 0$, calculemos

$$A'(t) = \int_v \int_u \frac{f_u g_u + f_v g_v + t(g_u^2 + g_v^2)}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2 + 2t(f_u g_u + f_v g_v) + t^2(g_u^2 + g_v^2)}}dudv.$$

# Relación entre Área mínima y superficie mínima

Imponiendo la condición anterior $A'(0) = 0$, tenemos

$$\int_v \int_u \frac{f_u g_u + f_v g_v}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} dudv = 0$$

Calculemos la integral, usando el Teorema de Green tenemos que

$$\int_v \int_u \frac{f_u g_u + f_v g_v}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} dudv$$

$$+ \int_v \int_u \frac{g[f_{uu}(1 + f_v^2) + f_{vv}(1 + f_u^2) - 2 f_u f_v f_{uv}]}{(1 + f_u^2 + f_v^2)^{\frac{3}{2}}} dudv =$$

$$\int_{\partial\Omega} \frac{f_u g dv}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} - \frac{f_v g du}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} = 0$$

# Relación entre Área mínima y superficie mínima

Como esto es verdadero para toda $g$, debemos tener

$$f_{uu}(1+f_v^2)+f_{vv}(1+f_u^2)-2f_uf_vf_{uv}=0$$

Esta es la ecuación de superficie mínima. En consecuencia, tenemos $H=0$, y hemos demostrado:

Si M es área-minimizadora, entonces M es mínima

# Parámetros isotermos

## Desde el punto de vista del análisis complejo

**Definición**: Una parametrización $\mathbf{x}(u, v)$ es *isoterma* si $E = G = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v$ y $F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 0$.

**Resultado**: *Las coordenadas isotermas existen sobre cualquier superficie mínima $M \subseteq \mathbb{R}^3$.*

# Funciones armónicas y superficies mínimas

**Resultado**: *Si la parametrización* $\mathbf{x}$ *es isoterma, entonces* el laplaciano tiene la forma: $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = (2EH)U$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} &= \left(\frac{E_u}{2E}\mathbf{x}_u - \frac{E_v}{2G}\mathbf{x}_v + lU\right) + \left(-\frac{G_u}{2E}\mathbf{x}_u + \frac{G_v}{2G}\mathbf{x}_v + nU\right) \\
&= \frac{E_u}{2E}\mathbf{x}_u - \frac{E_u}{2E}\mathbf{x}_u - \frac{E_v}{2E}\mathbf{x}_v + lU - \frac{E_u}{2E}\mathbf{x}_u + \frac{E_v}{2E}\mathbf{x}_v + nU \\
&= (l+n)U \\
&= 2E\left(\frac{(l+n)}{2E}\right)U.
\end{aligned}$$

Si la superficie es mínima ($H = 0$) el laplaciano es cero y por consiguiente la función es armónica.

# Funciones armónicas y superficies mínimas

**Resultado**: *Una superficie M con una parametrización isoterma* $\mathbf{x}(u,v) = (x^1(u,v), x^2(u,v), x^3(u,v))$ *es mínima si y sólo si* $x^1$, $x^2$ *y* $x^3$ *son funciones armónicas.*

**Resultado**: *Suponga que M es una superficie con parametrización* isoterma, sea

$$\phi^j = \frac{\partial \mathbf{x}^j}{\partial \mathbf{z}} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_u^j - \sqrt{-1}\mathbf{x}_v^j), \quad j = 1,2,3$$

entonces

$$\phi \cdot \phi = (\frac{\partial \mathbf{x}^1}{\partial \mathbf{z}})^2 + (\frac{\partial \mathbf{x}^2}{\partial \mathbf{z}})^2 + (\frac{\partial \mathbf{x}^3}{\partial \mathbf{z}})^2 = 0$$

. Entonces M es mínima si y sólo si cada $\phi^j$ *es holomórfica.*

# Funciones armónicas y superficies mínimas

**Resultado**: $x^j\left(z,\widetilde{z}\right) = c_j + 2\mathrm{Re}\int \phi^j dz.$

# Representación Weierstras–Enneper

(Representación Weierstrass-Enneper I). Si $f$ es una función holomórfica sobre un dominio $D$, $g$ es meromórfica en $D$ y $fg^2$ es holomórfica en $D$, *entonces una superficie mínima está definida por la parametrización* $\mathbf{x}(z,\overline{z}) = \left(x^1(z,\overline{z}), x^2(z,\overline{z}), x^3(z,\overline{z})\right)$, *donde*

$$x^1(z,\overline{z}) = \mathrm{Re}\int \left(1-g^2\right) f\, dz,$$
$$x^2(z,\overline{z}) = \mathrm{Re}\int \sqrt{-1}\left(1+fg^2\right)\, dz,$$
$$x^3(z,\overline{z}) = \mathrm{Re}\mathbf{2}\int fg\, dz.$$

# Representación Weierstras–Enneper

(Representación Weierstrass-Enneper II). *Para cualquier función holomórfica* $F(\tau)$, está definida una superficie mínima por la parametrización $\mathbf{x}(z,\overline{z}) = \left(x^1(z,\overline{z}), x^2(z,\overline{z}), x^3(z,\overline{z})\right)$, donde

$$
\begin{aligned}
x^1(z,\overline{z}) &= \mathrm{Re}\int \left(1-\tau^2\right) F(\tau)\, d\tau, \\
x^2(z,\overline{z}) &= \mathrm{Re}\int \sqrt{-1}\left(1+\tau^2\right) F(\tau)\, d\tau, \\
x^3(z,\overline{z}) &= \mathrm{Re}\mathbf{2}\int \tau F(\tau)\, d\tau.
\end{aligned}
$$

# Ejemplos (usaremos $i = \sqrt{-1}$)

## La helicoide

Sea $F(\tau) = \frac{i}{2\tau^2}$. Despues de integrar, haga la sustitución $\tau = e^z$ y usando identidades trigonométricas

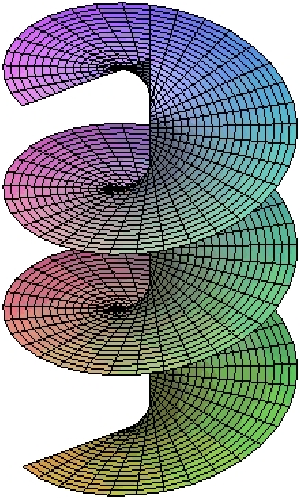
$$\begin{aligned} x^1 &= \mathrm{Re} \int \left(1-\tau^2\right) \frac{i}{2\tau^2} d\tau \\ &= \mathrm{Re} \int \frac{i}{2\tau^2} - \frac{1}{2} d\tau \\ &= -\mathrm{Re} i \left[\frac{1}{2\tau} + \frac{\tau}{2}\right] \\ &= -\mathrm{Re} i \frac{e^{-z}+e^z}{2} \\ &= -\mathrm{Re}(i \cosh z) \\ &= \sinh u \sin v, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 &= \mathrm{Re} i \int \left(1+\tau^2\right) \frac{i}{2\tau^2} d\tau \\ &= \mathrm{Re} \int i \left[\frac{i}{2\tau^2} + \frac{1}{2}\right] d\tau \\ &= -\mathrm{Re} i^2 \left[\frac{1}{2\tau} - \frac{\tau}{2}\right] \\ &= \mathrm{Re} i \frac{e^{-z}-e^z}{2} \\ &= \mathrm{Re}\left(-\sinh z\right) \\ &= -\sin u \cos v, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^3 &= \mathrm{Re} 2 \int \tau \frac{i}{2\tau^2} d\tau \\ &= \mathrm{Re} \int \frac{i}{\tau} d\tau \\ &= \mathrm{Re} i \ln \tau \\ & \mathrm{Re} iz \\ &= -v. \end{aligned}$$

# La helicoide

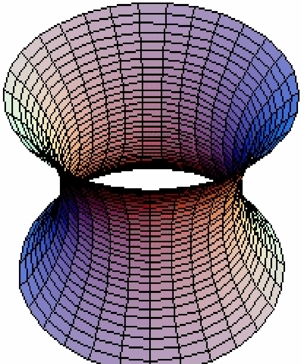
La parametrización resultante $(\sinh u \sin v, -\sin u \cos v, -v)$ es una forma de la helicoide. (Ésta helicoide es isométrica a la parametrización usual, esencialmente porque $u$ y $\sinh u$ muestran el mismo comportamiento cualitativo global). Por lo tanto, la representación asociada a $F(\tau)$ es una helicoide.



# La catenoide

Sea $F(\tau) = \frac{1}{2\tau^2}$. Entonces, usando la sustitución $\tau = e^z$, obtenga la representación Weierstrass-Enneper II para la catenoide

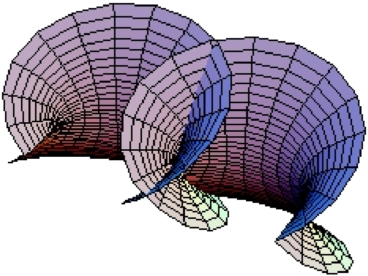
$$\mathbf{x}(u, v) = (-\cosh u \cos v, -\cosh u \sin v, u).$$



# La Catalan

Si usamos $F(\tau) = i\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau^3}\right)$. La representación asociada es la superficie de Catalan

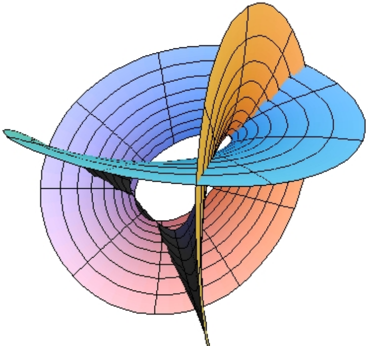
$$\mathbf{x}(u, v) = \left(u - \sin u \cosh v, 1 - \cos u \cosh v, 4 \sin \frac{u}{2} \sinh \frac{v}{2}\right).$$



# La Henneberg

Sea $F(\tau) = 1 - \frac{1}{\tau^4}$, la representación asociada es la superficie de Henneberg

$$\mathbf{x}(u,v) = \begin{array}{l} (2\sinh u \cos v - \frac{2}{3}\sinh 3u \cos 3v, \\ 2\sinh u \sin v + \frac{2}{3}\sinh 3u \sin 3v, \\ 2\cosh 2u \cos 2v). \end{array}$$



# Observaciones finales

- Los modelos matemáticos de las membranas de jabón están ligados con las superficies mínimas, es decir; aquellas que tienen curvatura media igual a cero.
- Nos falta ver que el problema de Plateau de encontrar la superficie de área mínima que tiene como frontera una curva dada tiene soluciones de varios tipos, para poder demostrar la existencia de soluciones en algunos casos será necesario reformular el problema ya que el área de una superficie que ésta dada por

$$A_B(\mathbf{x}) = \int\int_B \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| \, dudv$$

presenta dificultades porque acepta como mínimo superficies con cabellos y lo que queremos es superficies calvas (es decir, lisas), para ello usaremos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| &\leq \|\mathbf{x}_u\| \cdot \|\mathbf{x}_v\| \\ \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| &\leq \frac{1}{2}(\|\mathbf{x}_u\|^2 + \|\mathbf{x}_v\|^2) \end{aligned}$$

igualdad que se cumple

$$\mathbf{x}_u \perp \mathbf{x}_v \quad \text{y} \quad \|\mathbf{x}_u\| = \|\mathbf{x}_v\|$$

Lo anterior sugiere

$$D_B(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\int\int_B (\|\mathbf{x}_u\|^2 + \|\mathbf{x}_v\|^2)\, dudv$$

Los espero el próximo año con resultados.