El problema de ruteo de vehículos

Irma Delia García Calvillo
Universidad Autónoma de Coahuila

FC-UNAM, Agosto 2010

Introducción

- En las últimas décadas ha habido un incremento de paquetes de optimización basados en técnicas de investigación de operaciones o programación matemática, en sistemas de distribución para el manejo efectivo de la provisión de bienes o servicios.
- De acuerdo a aplicaciones del mundo real se ha mostrado que una buena planeación de los procesos de distribución genera ahorros del 5 % al 20 % en los costos de transportación global.
- Proceso de transportación: representa del 10 % al 20 % del costo final de los bienes.

Introducción

Exito de la utilización de las técnicas de IdeO en el proceso de transportación:

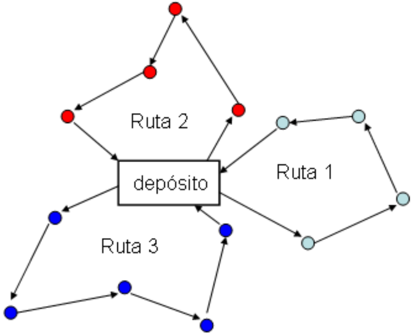
- Desarrollo de sistemas de cómputo y la integración de sistemas de información en el proceso productivo y comercial.
- Desarrollo de nuevos modelos y algoritmos.
- Modelos que toman en cuenta todas las características de los problemas de distribución en problemas del mundo real
- Algoritmos eficientes que encuentran soluciones en tiempos de cómputo aceptables en instancias reales.

El problema de ruteo de vehículos

VRP: Vehicle Routing Problem. Problema clásico de optimización combinatoria con múltiples aplicaciones.

- Un depósito central.
- Clientes que requieren productos con cierta demanda
- Una flotilla de vehículos disponibles con cierta capacidad de transportación.
- Se quiere planear la entrega de productos a los clientes.
- Se desea minimizar los costos de transportación (distancia total recorrida, número de vehículos, tiempo total de transportación).
- Se requiere diseñar las rutas de los vehículos que salen y regresan al depósito, satisfaciendo las demandas de los clientes, con ciertas restricciones operacionales.

El problema de ruteo de vehículos



El problema de ruteo de vehículos

La red vial se describe generalmente con un grafo, los arcos representan secciones o tramos viales y los vértices corresponden a los clientes.
Cada arco tiene asociado un costo que representa la longitud o tiempo de viaje.

Cuando se cuenta con un solo vehículo con capacidad ilimitada: problema de agente viajero (TSP)

VRP más difícil de resolver que el TSP

El problema de ruteo de vehículos

La red vial se describe generalmente con un grafo, los arcos representan secciones o tramos viales y los vértices corresponden a los clientes.
Cada arco tiene asociado un costo que representa la longitud o tiempo de viaje.

Cuando se cuenta con un solo vehículo con capacidad ilimitada: problema de agente viajero (TSP)

VRP más difícil de resolver que el TSP

Formulaciones Matemáticas para CVRP

- Formulaciones basadas en flujo vehicular (variables enteras asociadas con cada arco del grafo, cuentan en número de veces que un vehículo utiliza un arco)
- Formulaciones basadas en flujo de productos (Variables enteras adicionales asociadas a los arcos que representan la cantidad de productos en las rutas de los vehículos)
- Formulaciones basadas en particiones de conjuntos (Número exponencial de variables binarias, cada una asociada a una ruta factible)

Algunos modelos clásicos

- VRP capacitado
- VRP con ventanas de tiempo
- VRP con entrega y recolección
- VRP periódico
- ...

VRP capacitado (CVRP)

Modelo base.
Flota de k vehículos homogénea, todos cuenta con la misma capacidad Q.

El CVRP consiste en encontrar una colección de exactamente K ciclos, cada uno de ellos que corresponde a una ruta de un vehículo, con mínimo costo. Se define el costo total como la suma de los costos de los arcos que pertenecen al ciclo y tal que

i) Cada ciclo visita el depósito,
ii) Cada cliente es visitado exactamente por un ciclo, y
iii) La suma de las demandas de los vértices de un ciclo no exceda la capacidad del vehículo Q

VRP capacitado (CVRP)

Modelo base.
Flota de k vehículos homogénea, todos cuenta con la misma capacidad Q.

El CVRP consiste en encontrar una colección de exactamente K ciclos, cada uno de ellos que corresponde a una ruta de un vehículo, con mínimo costo. Se define el costo total como la suma de los costos de los arcos que pertenecen al ciclo y tal que

i) Cada ciclo visita el depósito,
ii) Cada cliente es visitado exactamente por un ciclo, y
iii) La suma de las demandas de los vértices de un ciclo no exceda la capacidad del vehículo Q

Formulación Matemática para CVRP: modelo de flujo vehicular

$G = (V, A)$ grafo completo no dirigido
$V = \{v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ Conjunto de nodos, v_0 es el depósito.
$A = \{(i, j) : i, j \in V, i \neq j\}$ Conjunto de aristas
$C = (c_{ij})$ Matriz de costos de ir del nodo i al nodo j
d_i = demanda del nodo i.
k = Número de vehículos disponibles.
Q = capacidad de los vehículos

Usaremos el modelo de dos índices, que considera las Variables de decisión

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si la solución utiliza el arco } (i, j) \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Formulación Matemática para CVRP: modelo de flujo vehicular

$G = (V, A)$ grafo completo no dirigido
$V = \{v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ Conjunto de nodos, v_0 es el depósito.
$A = \{(i,j) : i, j \in V, i \neq j\}$ Conjunto de aristas
$C = (c_{ij})$ Matriz de costos de ir del nodo i al nodo j
d_i = demanda del nodo i.
k = Número de vehículos disponibles.
Q = capacidad de los vehículos

Usaremos el modelo de dos índices, que considera las Variables de decisión

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si la solución utiliza el arco } (i,j) \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Formulación Matemática para CVRP

$$\min \sum_{i\in V} \sum_{j\in V} c_{ij} x_{ij}$$

sujeto a

$$\sum_{i\in V} x_{ij} = 1, \quad \forall j \in V\backslash\{0\} \tag{1}$$

$$\sum_{j\in V} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in V\backslash\{0\} \tag{2}$$

$$\sum_{i\in V} x_{i0} = k \tag{3}$$

$$\sum_{j\in V} x_{0j} = k \tag{4}$$

$$\sum_{i\notin S} \sum_{j\in S} x_{ij} \geq r(S), \quad \forall S \subset V\backslash\{0\}, \quad S \neq \Phi \tag{5}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \; \forall i,j \in V \tag{6}$$

Formulación Matemática para CVRP

La restricción (5) impide la existencia de subtours: restricciones de capacidad y corte.

$r(S)$ es el número mínimo de vehículos necesarios para satisfacer la demanda en S.

Estas restricciones tiene cardinalidad que crece exponencialmente con n, se sugiere sustituirlas por una familia de restricciones con cardinalidad polinomial, dadas por

$$u_i - u_j + Qx_{ij} \leq Q - d_j$$

$\forall i, j \in V \backslash \{0\},\ i \neq j,$ tal que $d_i + d_j \leq Q$

$$d_i \leq u_i \leq Q, \ \ \forall i \in V \backslash \{0\}$$

donde u_i, $i \in V \backslash \{0\}$, son variables continuas adicionales que representan la carga del vehículo después de visitar al cliente i.

El caso simétrico

$G = (V, E)$, E conjunto de aristas, $e \in E = \{(i,j) : i,j \in V, i < j\}$.

$\delta(S) = \{(i,j) : i \in S, j \notin S \text{ ó } i \notin S, j \in S\}$

x_e variable entera que indica el número de veces que se utiliza la arista e en la solución.

El caso simétrico

$$\text{mín} \sum_{e \in E} c_e x_e$$

sujeto a

$$\sum_{e \in \delta(i)} x_e = 2, \qquad i \in V \backslash \{0\}$$

$$\sum_{e \in \delta(0)} x_e = 2K,$$

$$\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 2r(S), \qquad S \subset V \backslash \{0\}, S \neq \emptyset$$

$$x_e \in \{0,1\} \quad (e \notin \delta(0))$$

$$x_e \in \{0,1,2\} \quad (e \in \delta(0))$$

Formulación Matemática para CVRP: modelo partición de conjuntos

Sea $\mathcal{R} = \{R_1, R_2, \ldots, R_s\}$ la colección de todas las rutas factibles.
Cada ruta tiene asociado un costo γ_j y a_{ij} variable binaria igual a 1 si el nodo i es visitado por la ruta R_j.
Variables x_j binaria, $=1$ si la ruta R_j se utiliza en la solución.

$$\min \sum_{j=1}^{s} \gamma_j x_j$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^{s} a_{ij} x_j = 1, \qquad i \in V \setminus \{0\}$$

$$\sum_{j=1}^{s} x_j = K$$

$$x_j \in \{0,1\} \qquad j = 1, \ldots, s$$

VRP con ventanas de tiempo

VRPTW: VRP Time Window
Una de las variantes más importantes del VRP clásico.

El servicio en cada cliente i debe iniciar en un período de tiempo dado $[a_i, b_i]$ llamado ventana de tiempo.

El vehículo puede llegar antes de a_i pero tendrá que esperar a que el cliente esté listo para ser atendido, pero no podrá llegar después del tiempo b_i.
El tiempo de servicio en el cliente i se denota por s_i.

VRP con ventanas de tiempo

VRPTW consiste en determinar K ciclos con costo mínimo tal que

i) Cada ciclo visita el depósito.

ii) Cada cliente es visitado exactamente por un ciclo.

iii) La suma de las demandas de los vértices de un ciclo no exceda la capacidad del vehículo Q.

iv) Para cada cliente i el tiempo de servicio inicia en el período $[a_i, b_i]$ y el vehículo se detiene por s_i tiempo.

Formulación VRP con ventanas de tiempo

$G = (V, A), |V| = n + 2$ el depósito se representa por 0 y el nodo (n+1). Las rutas inician en 0 y terminan en n+1

s_i tiempo de servicio en el nodo i $(s_0 = s_{n+1} = 0)$

t_{ij} tiempo de viaje del nodo i al j

$[a_i, b_i]$ ventana de tiempo del nodo i

$\delta^+(i) = \{j : (i,j) \in A\}, \qquad \delta^-(i) = \{i : (i,j) \in A\}$

Variables:

- x_{ij}^k binaria, 1 si el arco (i,j) es utilizado por el vehículo k, 0 en otro caso
- w_i^k continua que indica el tiempo en que el vehículo k inicia el servicio en el nodo i

Formulación VRP con ventanas de tiempo

$$\text{mín} \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}^k$$

sujeto a

$$\sum_{k \in K} \sum_{j \in \delta^+(i)} x_{ij}^k = 1, \qquad i \in V \backslash \{0, n+1\}$$

$$\sum_{j \in \delta^+(0)} x_{0j}^k = 1, \qquad k \in K$$

$$\sum_{i \in \delta^-(j) x_{ij}^k} - \sum_{i \in \delta^+(j)} x_{ji}^k = 0, \qquad k \in K, i \in V \backslash \{0\}$$

$$\sum_{j \in \delta^-(n+1)} x_{i,n+1}^k = 1, \qquad k \in K$$

Formulación VRP con ventanas de tiempo

$$
\begin{aligned}
x_{ij}^k(w_i^k + s_i + t_{ij} - w_j^k) &\leq 0, & & k \in K, (i,j) \in A \\
a_i \leq w_i^k &\leq b_i, & & k \in K, i \in V \\
\sum_{i \in V \setminus \{0, n+1\}} d_i \sum_{j \in \delta^+(i)} x_{ij}^k &\leq Q, & & k \in K \\
x_{ij}^k &\in \{0, 1\}, & & k \in K, (i,j) \in A
\end{aligned}
$$

VRP con entrega y recolección

VRPPD: VRP Pick and Delivering

Cada cliente i tiene asociada dos cantidades d_i y p_i que representan la demanda que será entregada y recolectada, respectivamente.

Para cada cliente i, $\mathcal{O}_i$ denota el vértice que es el origen de la demanda entregada y $\mathcal{D}_i$ denota el vértice destino de la demanda recolectada.

VRP con entrega y recolección

EL VRPPD consiste en encontrar K ciclos de costo mínimo, tales que

i) Cada ciclo visita el depósito.

ii) Cada cliente es visitado exactamente por un ciclo.

iii) La carga del vehículo durante el ciclo debe ser no negativa y que no exceda la capacidad del vehículo Q.

iv) Para cada cliente i, el cliente $\mathcal{O}_i$ diferente del depósito, debe ser atendido en el mismo ciclo antes del cliente i.

v) Para cada cliente i, el cliente $\mathcal{D}_i$ diferente del depósito, debe ser atendido en el mismo ciclo después del cliente i.

VRP periódico

PVRP: Periodic VRP

Las rutas deben diseñarse sobre múltiples días o períodos, esto es, en un horizonte de planeación.

Cada cliente requiere n_i visitas durante el horizonte de planeación distribuidas en posibles calendarios factibles para cada cliente.

Un calendario es una colección de días en el horizonte de planeción en los cuales los clientes recibirán el servicio. Asignar a un cliente a un calendario implica que el cliente recibirá el servicio en cada día del calendario.

Por ejemplo, en un horizonte de una semana con 5 días disponibles, si un cliente requiere dos visitas durante la semana, las combinaciones disponibles pueden ser solamente Lunes-Viernes o Lunes- Jueves o Martes-Viernes, pero no se aceptan otras combinaciones para visitar a este cliente.

VRP periódico

PVRP: Periodic VRP
Las rutas deben diseñarse sobre múltiples días o períodos, esto es, en un horizonte de planeación.
Cada cliente requiere n_i visitas durante el horizonte de planeación distribuidas en posibles calendarios factibles para cada cliente.

Un calendario es una colección de días en el horizonte de planeción en los cuales los clientes recibirán el servicio. Asignar a un cliente a un calendario implica que el cliente recibirá el servicio en cada día del calendario.

Por ejemplo, en un horizonte de una semana con 5 días disponibles, si un cliente requiere dos visitas durante la semana, las combinaciones disponibles pueden ser solamente Lunes-Viernes o Lunes- Jueves o Martes-Viernes, pero no se aceptan otras combinaciones para visitar a este cliente.

VRP periódico

PVRP consiste en determinar K ciclos en un horizonte de p días con costo mínimo tal que

i) Cada ciclo visita el depósito.

ii) Cada cliente es visitado por n_i ciclos, donde cada visita se realiza en una combinación de días de visitas disponibles para cada cliente.

iii) La suma de las demandas de los vértices de un ciclo no exceda la capacidad del vehículo Q.

Otras variantes

- Múltiples depósitos (Multiple depot VRP)
- Los clientes pueden ser servidos por múltiples vehículos (Split delivery VRP)
- Datos con incertidumbre (Stochastic VRP)
- Rutas abiertas

Objetivos

- Minimizar costos,
- Minimizar longitud de rutas,
- Minimizar la longitud de la ruta más larga,
- Balance que puede ser de carga, número de clientes, tiempo de ruta,
- Maximizar la satisfacción de clientes,
- Minimizar el número de vehículos,
- Maximizar la compacidad de las rutas,

Métodos de solución

- Métodos exactos
- Métodos aproximados

Problema NP–completo.

En instancias aleatorias con Cplex v.9.0 Sun Fire V440 con 4 procesadores Ultra Sparc III a 1062 GHZ con 8 Gb de RAM
10 nodos: 60 seg.
12 nodos: 4770 seg. (79 minutos)
15 nodos: 172686 seg. (48 horas)

Métodos de solución

- Métodos exactos
- Métodos aproximados

Problema NP–completo.

En instancias aleatorias con Cplex v.9.0 Sun Fire V440 con 4 procesadores Ultra Sparc III a 1062 GHZ con 8 Gb de RAM
10 nodos: 60 seg.
12 nodos: 4770 seg. (79 minutos)
15 nodos: 172686 seg. (48 horas)

Métodos de solución

- Métodos exactos
- Métodos aproximados

Problema NP–completo.

En instancias aleatorias con Cplex v.9.0 Sun Fire V440 con 4 procesadores Ultra Sparc III a 1062 GHZ con 8 Gb de RAM
10 nodos: 60 seg.
12 nodos: 4770 seg. (79 minutos)
15 nodos: 172686 seg. (48 horas)

Métodos exactos

- Ramificación y acotamiento (Branch & Bound)
- Ramificación y corte (Branch & Cut)

Métodos aproximados

- Heurísticos
- Metaheurísticos

Métodos heurísticos

Los algoritmos heurísticos clásicos para el VRP pueden dividirse en tres categorías principales:

- **Algoritmos constructivos.** Construyen gradualmente una solución factible para el problema intentando optimizar la función objetivo, pero no incluyen ninguna fase de mejora de la solución encontrada.
- **Algoritmos de dos fases.** Descomponen de forma natural el problema en dos etapas, una de agrupación de vértices y otra de construcción de rutas.
- **Algoritmos de mejora.** Parten de una solución factible inicial y tratan de mejorarla realizando intercambios de arcos o vértices dentro de cada ruta o entre varias rutas.

Métodos Metaheurísticos

Búsqueda Tabú (Cordeau)
Algoritmos genéticos (Prins)
GRASP

Bibliografía

- J.F. Cordeau, G. Laporte, A. Mercier, A Unified Tabu Search Heuristic for Vehicle Routing Problems with Time Windows, The Journal of the Operational Research Society, (52) 928–936, 2001.
- J.F. Cordeau, G. Laporte, M. Savelsberg, D. Vigo. "Vehicle Routing"in C. Barnhart and G. Laporte (Editors), Transportation, handbooks in operations research and managament science, Vol. 14, Elsevier, Amsterdam, pp. 367–428, 2007.
- D. Mester, O. Bräysy, Actived-guided evolution strategies for large–scale capacitated vehicle routing problems, Computers & Operations Research, (34) 2964–2975, 2007.

Bibliografía ...

- D. Pisinger, S. Ropke, A general heuristic for vehicle routing problems, Computers & Operations Research, (34) 2403–2435, 2007.
- C. Prins, A simple and effective evolutionary algorithm for the vehicle routing problem, Computers & Operations Research, (31) 1985–2002, 2004.
- P. Toth, D. Vigo, *The Vehicle Routing Problem*, SIAM, 2002.