

Un esquema simplificado de primer orden para la solución de ecuaciones de Poisson en regiones irregulares del plano.

F. Domínguez-Mota, P. M. Fernández, G. Tinoco-Guerrero
J. G. Tinoco-Ruiz

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO
EDIFICIO B, CIUDAD UNIVERSITARIA, MORELIA, C.P. 58060

Seminario Semanal del Laboratorio de Cómputo Científico. 07.02.13



Objetivo

Motivación

Presentar un esquema simple de primer orden de diferencias finitas, el cual se deriva de un problema sin restricciones de mínimos cuadrados definido por la condición de consistencia para los residuales de primer, segundo y tercer orden en la expansión de Taylor del error de truncación local.

Outline

- 1** **Introducción**
- 2 Notación
- 3 Esquema propuesto
- 4 Pruebas numéricas
- 5 Aplicación
- 6 Conclusiones y Trabajo a Futuro

Introducción

Ecuaciones de Poisson.

Un problema importante en el cómputo científico es encontrar la solución de ecuaciones de tipo Poisson, sin embargo, la mayoría de las técnicas para encontrar el resultado se aplican sobre regiones rectangulares o con una geometría muy simple.

Los dominios de los problemas con condiciones que asemejan situaciones reales poseen una geometría bastante irregular comúnmente carente de simetrías.

Existen algunos pocos métodos confiables basados en diferencias finitas que puedan aplicarse sobre este tipo de dominios.

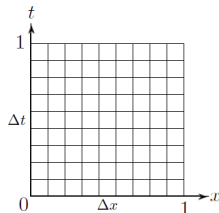
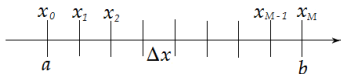
Introducción

Diferencias Finitas Clásicas.

La idea principal al querer resolver una EDP por aproximación con diferencias finitas es remplazar el problema continuo por un número finito de evaluaciones en un subconjunto del dominio. De esta manera el problema de encontrar una solución a una ecuación diferencial parcial se convierte en tratar de encontrar la solución a un sistema algebraico de dimensión finita, para los cuales existen herramientas simples que podemos utilizar.

Para definir el subconjunto del dominio en donde se harán las evaluaciones, se definen nodos en el área de interés en los que se harán las aproximaciones a la función continua. Suponemos que el mallado se hace de una forma que nos permita la aplicación de nuestros esquemas.

Mallado del dominio

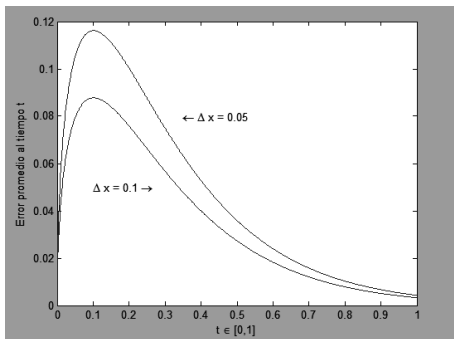


En regiones sencillas que fácilmente se descomponen en regiones rectangulares el mallado del dominio se puede definir como un conjunto de subintervalos regulares cuyas fronteras definen los nodos en los que se aplicará el esquema.

Errores en los esquemas

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \quad (x, t) \in \Omega = (0, 1) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2 \quad (1)$$

$$\varphi = f, \quad (x, t) \in \partial\Omega \quad (2)$$



Análisis de Aproximación

Estabilidad

Describe la forma en que los errores en los datos de entrada se propagan a través del algoritmo. Una pequeña variación podría dar resultados muy diferentes de los esperados.

Consistencia

El concepto de consistencia en un esquema diferencial se puede definir ya sea en general o punto a punto. Este concepto está relacionado con el error de truncamiento.

Convergencia

Al aumentar el número de nodos en el dominio de interés se espera que la aproximación a la solución obtenida sea mejor.

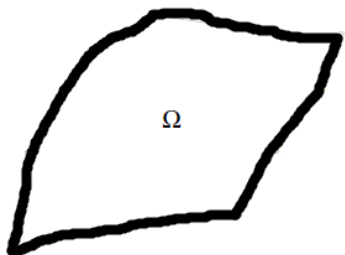
Outline

- 1 Introducción
- 2 Notación**
- 3 Esquema propuesto
- 4 Pruebas numéricas
- 5 Aplicación
- 6 Conclusiones y Trabajo a Futuro

Dominios de Interés

Los dominios que consideraremos en este trabajo son dominios irregulares simplemente conexos definidos por una curva de Jordan cerrada, simple y orientada positivamente, los cuales no pueden ser fácilmente descompuestos en rectángulos.

Para dichos dominios se utilizaron los llamados funcionales de área y armónico para generar mallados convexos estructurados apropiados.

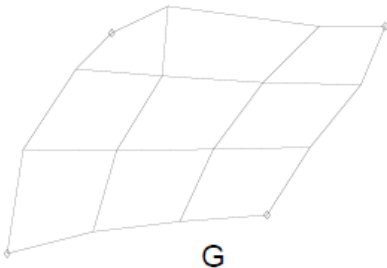


Malla Estructurada

Un conjunto

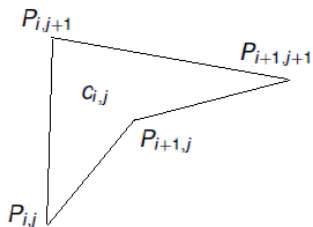
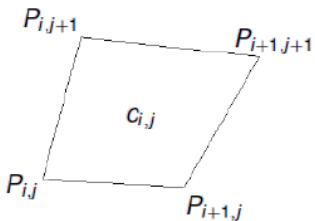
$$G = \{P_{i,j} | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$$

de puntos del plano cuyas posiciones se encuentran determinadas por V es una **malla estructurada** con elementos cuadrilaterales para Ω , de orden $m \times n$.

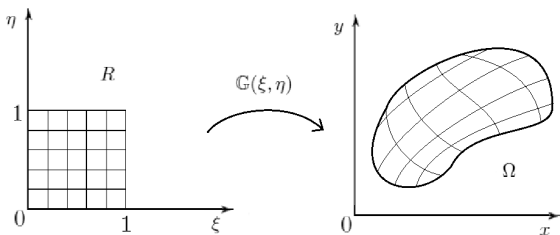


Convexidad

Dicha malla G es **convexa** si y solo si cada uno de los $(m-1)(n-1)$ cuadriláteros (o celdas) $c_{i,j}$ con vértices $\{P_{i,j}, P_{i+1,j}, P_{i,j+1}, P_{i+1,j+1}\}$, $1 \leq i < m$, $1 \leq j < n$, es convexo y no degenerado.



El funcional \mathbb{G} usado para generar las mallas convexas estructuradas de las pruebas numéricas para este trabajo fue una combinación lineal convexa de los funcionales de área $S_{\omega}(G)$ y longitud $L(G)$ con un peso de $\sigma = 0,5$, tal como están implementados en el programa UNAMALLA.



Outline

- 1 Introducción
- 2 Notación
- 3 Esquema propuesto**
- 4 Pruebas numéricas
- 5 Aplicación
- 6 Conclusiones y Trabajo a Futuro

Esquema Propuesto

Diferencias Finitas

Consideremos el operador lineal de segundo orden

$$Lu = Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu. \quad (3)$$

Un esquema de diferencias en p_0 es una combinación lineal de los valores de la función en los nodos $p_0, p_1, p_2, \dots, p_k$, para los cuales es necesario encontrar los coeficientes $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$ tales que

$$\sum_{i=0}^k \Gamma_i u(p_i) \approx [Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y]_{p_0}.$$

Un esquema es consistente si

$$\sum_{i=0}^k \Gamma_i u(p_i) - [Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y]_{p_0} \rightarrow 0,$$

cuando $p_1, \dots, p_k \rightarrow p_0$.

Condiciones de consistencia

Para que la condición de consistencia se cumpla, debe satisfacerse que:

$$\begin{aligned}
 & [Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu]_{p_0} - \sum_{i=0}^k \Gamma_i u(p_i) = \\
 & \left(F(p_0) - \sum_{i=0}^k \Gamma_i \right) u(p_0) + \left(D(p_0) - \sum_{i=1}^k \Gamma_i \Delta x_i \right) u_x(p_0) + \\
 & \left(E(p_0) - \sum_{i=1}^k \Gamma_i \Delta y_i \right) u_y(p_0) + \left(A(p_0) - \sum_{i=1}^k \frac{\Gamma_i (\Delta x_i)^2}{2} \right) u_{xx}(p_0) + \\
 & \left(B(p_0) - \sum_{i=1}^k \Gamma_i \Delta x_i \Delta y_i \right) u_{xy}(p_0) + \left(C(p_0) - \sum_{i=1}^k \frac{\Gamma_i (\Delta y_i)^2}{2} \right) u_{yy}(p_0) + \\
 & \left(- \sum_{i=1}^k \frac{\Gamma_i (\Delta x_i)^3}{3!} \right) u_{xxx}(p_0) + \left(- \sum_{i=1}^k \frac{\Gamma_i (\Delta x_i)^2 \Delta y_i}{2} \right) u_{xxy}(p_0) + \\
 & \left(- \sum_{i=1}^k \frac{\Gamma_i \Delta x_i (\Delta y_i)^2}{2} \right) u_{xyy}(p_0) + \left(- \sum_{i=1}^k \frac{\Gamma_i (\Delta y_i)^3}{3!} \right) u_{yyy}(p_0) + \\
 & \mathcal{O}(\max\{\Delta x_i, \Delta y_i\})^4
 \end{aligned}$$

donde $\Delta x_i = x_i - x_0$ y $\Delta y_i = y_i - y_0$

Condiciones de consistencia

Para el caso de una submalla de 3×3 definida por p_0, p_1, \dots, p_8 , hay 10 ecuaciones y 9 incógnitas.

Sistema de Ecuaciones

$$\begin{pmatrix}
 1 & 1 & \dots & 1 \\
 0 & \Delta x_1 & \dots & \Delta x_8 \\
 0 & \Delta y_1 & \dots & \Delta y_8 \\
 0 & (\Delta x_1)^2 & \dots & (\Delta x_8)^2 \\
 0 & \Delta x_1 \Delta y_1 & \dots & \Delta x_8 \Delta y_8 \\
 0 & (\Delta y_1)^2 & \dots & (\Delta y_8)^2 \\
 0 & (\Delta x_1)^3 & \dots & (\Delta x_8)^3 \\
 0 & (\Delta x_1)^2 \Delta y_1 & \dots & (\Delta x_8)^2 \Delta y_8 \\
 0 & (\Delta y_1)^2 \Delta x_1 & \dots & (\Delta y_8)^2 \Delta x_8 \\
 0 & (\Delta y_1)^3 & \dots & (\Delta y_8)^3
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 \Gamma_0 \\
 \Gamma_1 \\
 \Gamma_2 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \Gamma_8
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 F(p_0) \\
 D(p_0) \\
 E(p_0) \\
 2A(p_0) \\
 B(p_0) \\
 2C(p_0) \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{pmatrix}
 \quad (4)$$

La pregunta es:

¿Cómo elegimos los coeficientes Γ_i ?

Una alternativa que ha probado ser eficiente es la siguiente:

Se separa la primer ecuación del sistema de ecuaciones de modo que obtenemos

$$\sum_{i=0}^8 \Gamma_i - F = 0$$

Eliminando la primer columna de la matriz en (2), dado que es de ceros, y el elemento Γ_0 obtenemos un nuevo sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} \Delta x_1 & \dots & \Delta x_8 \\ \Delta y_1 & \dots & \Delta y_8 \\ (\Delta x_1)^2 & \dots & (\Delta x_8)^2 \\ \Delta x_1 \Delta y_1 & \dots & \Delta x_8 \Delta y_8 \\ (\Delta y_1)^2 & \dots & (\Delta y_8)^2 \\ (\Delta x_1)^3 & \dots & (\Delta x_8)^3 \\ (\Delta x_1)^2 \Delta y_1 & \dots & (\Delta x_8)^2 \Delta y_8 \\ (\Delta y_1)^2 \Delta x_1 & \dots & (\Delta y_8)^2 \Delta x_8 \\ (\Delta y_1)^3 & \dots & (\Delta y_8)^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Gamma_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D(p_0) \\ E(p_0) \\ 2A(p_0) \\ B(p_0) \\ 2C(p_0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Esquema Iterativo

Optimización

Para comparar los resultados se utilizó un método iterativo de segundo orden en el que se propone calcular los coeficientes $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_8$ como la solución al problema de optimización restringido

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & z = R_6^2 + R_7^2 + R_8^2 + R_9^2, \\ \text{sujeto a} & R_i = 0, \quad i = 0, \dots, 5. \end{array} \quad (6)$$

donde

$$\begin{aligned} R_0 &= \sum_{i=0}^8 \Gamma_i - F = 0, & R_3 &= \sum_{i=1}^8 \Gamma_i (\Delta x_i)^2 - 2A = 0, \\ R_1 &= \sum_{i=1}^8 \Gamma_i (\Delta x_i) - D = 0, & R_4 &= \sum_{i=1}^8 \Gamma_i (\Delta x_i) (\Delta y_i) - B = 0, \\ R_2 &= \sum_{i=1}^8 \Gamma_i (\Delta y_i) - E = 0, & R_5 &= \sum_{i=1}^8 \Gamma_i (\Delta y_i)^2 - 2C = 0, \\ R_6 &= \sum_{i=1}^8 \Gamma_i (\Delta x_i)^3, \\ R_7 &= \sum_{i=1}^8 \Gamma_i (\Delta x_i)^2 (\Delta y_i), \\ R_8 &= \sum_{i=1}^8 \Gamma_i (\Delta x_i) (\Delta y_i)^2, \\ R_9 &= \sum_{i=1}^8 \Gamma_i (\Delta y_i)^3. \end{aligned}$$

Esquema directo

Factorización de Cholesky

Utilizando las ecuaciones normales se cambia el problema original por un problema de optimización y, empleando la factorización de Cholesky sobre el sistema de ecuaciones normales, calculamos los coeficientes $\Gamma_1, \dots, \Gamma_8$. Así, se resuelve el sistema

$$M^T M \Gamma = M^T \beta \quad (7)$$

en donde

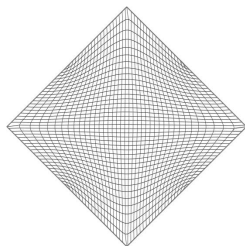
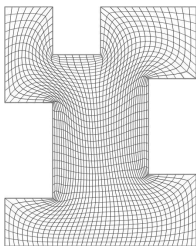
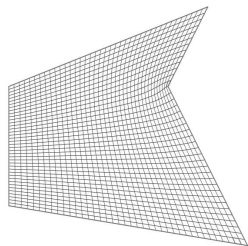
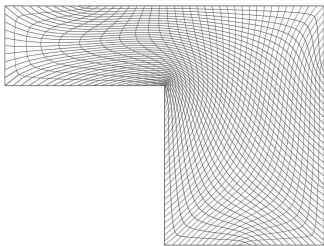
$$M = \begin{pmatrix} \Delta x_1 & \dots & \Delta x_8 \\ \Delta y_1 & \dots & \Delta y_8 \\ (\Delta x_1)^2 & \dots & (\Delta x_8)^2 \\ \Delta x_1 \Delta y_1 & \dots & \Delta x_8 \Delta y_8 \\ (\Delta y_1)^2 & \dots & (\Delta y_8)^2 \\ (\Delta x_1)^3 & \dots & (\Delta x_8)^3 \\ (\Delta x_1)^2 \Delta y_1 & \dots & (\Delta x_8)^2 \Delta y_8 \\ (\Delta y_1)^2 \Delta x_1 & \dots & (\Delta y_8)^2 \Delta x_8 \\ (\Delta y_1)^3 & \dots & (\Delta y_8)^3 \end{pmatrix}; \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \Gamma_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \Gamma_8 \end{pmatrix}; \quad \beta = \begin{pmatrix} D(\rho_0) \\ E(\rho_0) \\ 2A(\rho_0) \\ B(\rho_0) \\ 2C(\rho_0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Una vez que se obtuvieron $\Gamma_1, \dots, \Gamma_8$ se procede a obtener Γ_0 de $\sum_{i=0}^8 \Gamma_i - F = 0$.

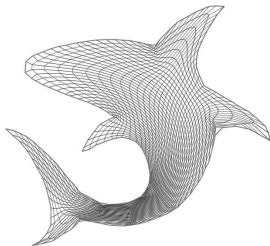
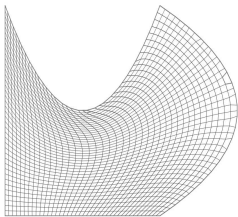
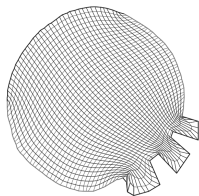
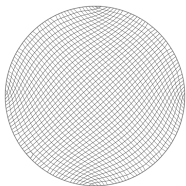
Outline

- 1 Introducción
- 2 Notación
- 3 Esquema propuesto
- 4 Pruebas numéricas**
- 5 Aplicación
- 6 Conclusiones y Trabajo a Futuro

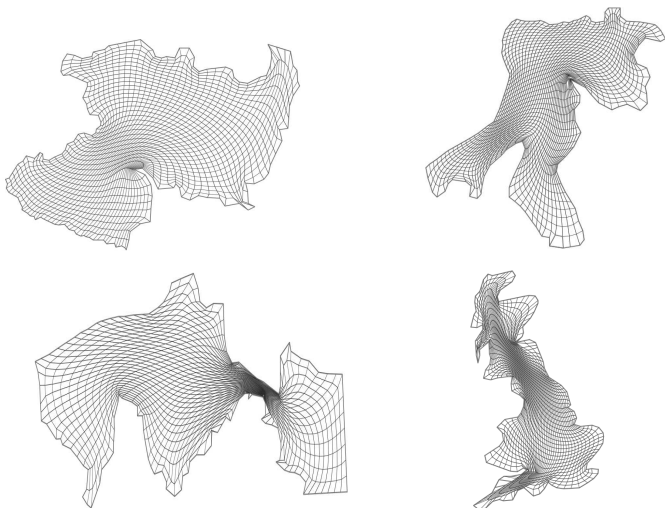
Mallas de prueba: Ele, M14, M19, Rombo



Mallas de prueba: Círculo (CIR), Cráneo (CRN), Cisne (SWA), Escualo (EQL)



Mallas de prueba: Michoacán (MIC), Bahía de la Habana (HAB), Tabasco (TAB), Gran Bretaña (ENG)



Poisson

Ejemplo 1

$$u_{xx} + u_{yy} = 10e^{2x+y}, \quad u(\partial\Omega) = 2e^{2x+y}.$$

Solución en forma cerrada: $u(x, y) = 2e^{2x+y}$.

Ejemplo 2

$$\nabla \cdot (K\nabla u(x, y)) = f(x, y); \quad u(\partial\Omega) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$$

donde

$$K \equiv \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{bmatrix} = P^{-1}DP,$$

$$P = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{8}) & \sin(\frac{\pi}{8}) \\ -\sin(\frac{\pi}{8}) & \cos(\frac{\pi}{8}) \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 + 2x^2 + y^2 & 0 \\ 0 & 1 + x^2 + 2y^2 \end{bmatrix}.$$

Solución en forma cerrada: $u(x, y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$.

Los sistemas obtenidos se resolvieron empleando el método descrito; el error cuadrático fue calculado con

$$\|\mathcal{U} - \hat{\mathcal{U}}\|_2 = \sqrt{\sum_{i,j} (\mathcal{U}_{i,j} - \hat{\mathcal{U}}_{i,j})^2 \mathcal{A}_{i,j}}, \quad (8)$$

donde $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_{i,j})$ y $\hat{\mathcal{U}} = (\hat{\mathcal{U}}_{i,j})$ son la solución exacta y aproximada en el nodo i, j de la malla respectivamente, y $\mathcal{A}_{i,j}$ es el área del elemento.

Los órdenes empíricos entre mallas de dos tamaños consecutivos están dados por

$$\frac{\log \left(\frac{E_i}{E_j} \right)}{\log \left(\frac{n_j}{n_i} \right)}, \quad (9)$$

donde E_i es el error cuadrático asociado a la malla con n_i puntos por lado.

Los sistemas obtenidos se resolvieron empleando el método descrito; el error cuadrático fue calculado con

$$\|\mathcal{U} - \hat{\mathcal{U}}\|_2 = \sqrt{\sum_{i,j} (\mathcal{U}_{i,j} - \hat{\mathcal{U}}_{i,j})^2 \mathcal{A}_{i,j}}, \quad (8)$$

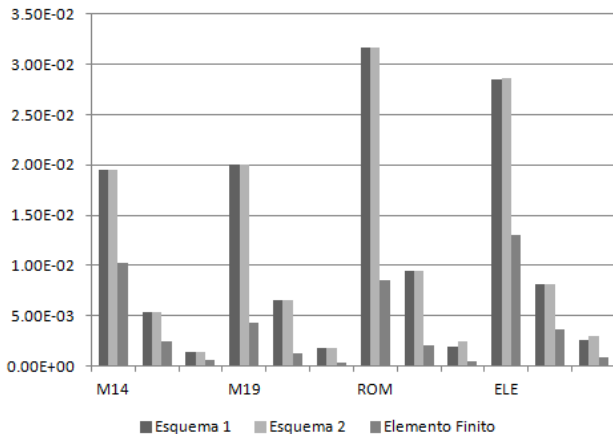
donde $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_{i,j})$ y $\hat{\mathcal{U}} = (\hat{\mathcal{U}}_{i,j})$ son la solución exacta y aproximada en el nodo i, j de la malla respectivamente, y $\mathcal{A}_{i,j}$ es el área del elemento.

Los órdenes empíricos entre mallas de dos tamaños consecutivos están dados por

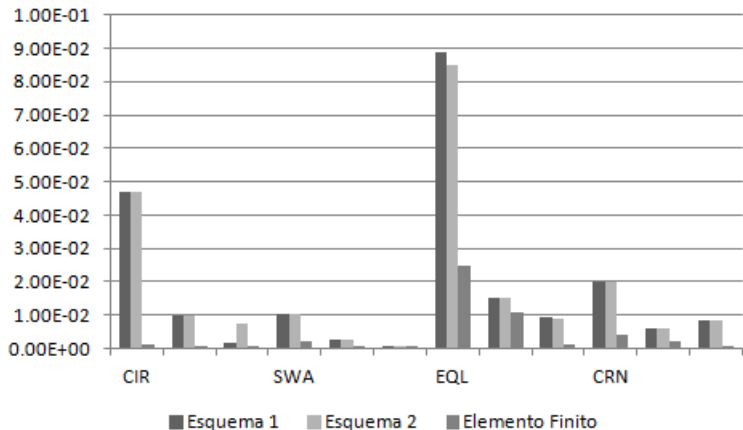
$$\frac{\log\left(\frac{E_i}{E_j}\right)}{\log\left(\frac{n_j}{n_i}\right)}, \quad (9)$$

donde E_i es el error cuadrático asociado a la malla con n_i puntos por lado.

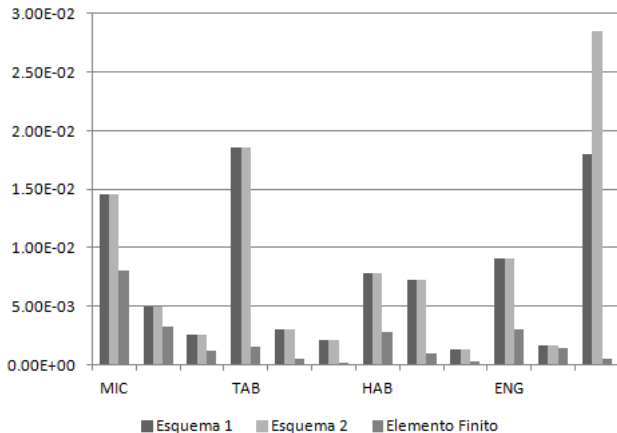
Resultados: Problema 1 (Regiones simples)



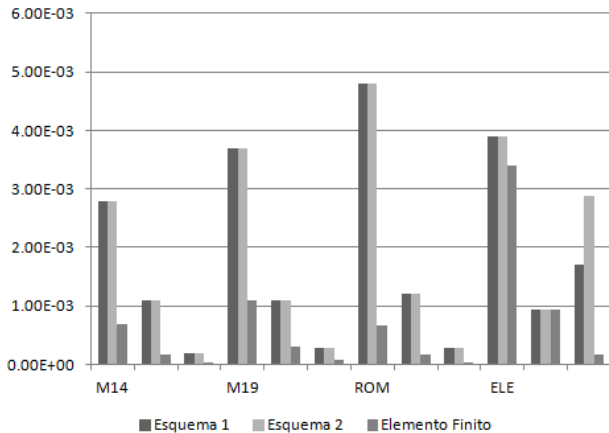
Resultados: Problema 1 (Regiones de complejidad media)



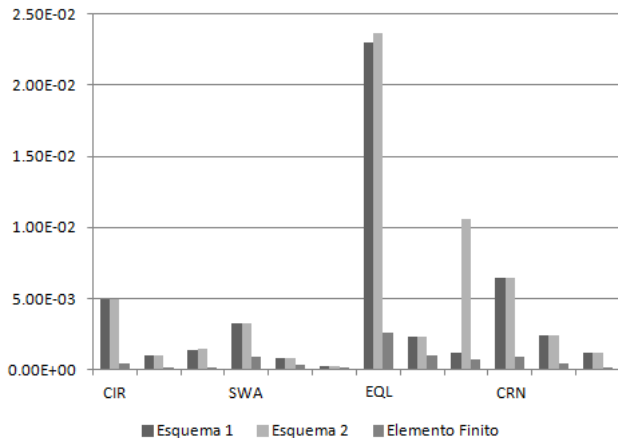
Resultados: Problema 1 (Regiones geográficas)



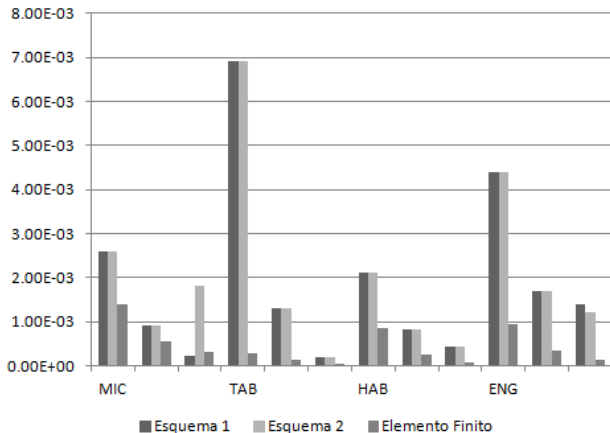
Resultados: Problema 2 (Regiones simples)



Resultados: Problema 2 (Regiones de complejidad media)



Resultados: Problema 2 (Regiones geográficas)



Resultados. Problema 1.

Malla	No	Error directo	Orden	Error iterativo	Orden	t	\hat{t}	Ahorro
ENG	21	7.7271E-02		7.2750E-02		0.1560	1.0608	85.3 %
	41	8.8895E-04	6.67	8.8152E-04	6.60	0.5148	2.4180	78.8 %
	81	2.7676E-02	-5.05	1.0990E-02	-3.71	4.2120	11.1541	62.3 %
HAB	21	2.4494E-02		2.4486E-02		0.2496	0.6396	61 %
	41	2.6795E-03	3.31	2.6794E-03	3.31	1.0920	2.5584	57.4 %
	81	1.4604E-03	0.89	1.5902E-03	0.77	5.5848	12.0277	53.6 %
MIC	21	2.4260E-03		2.4260E-03		0.2652	0.6552	59.6 %
	41	2.1554E-03	0.18	2.1534E-03	0.18	0.9984	2.6208	62 %
	81	1.9383E-04	3.54	1.8933E-04	3.57	5.6316	11.7781	52.2 %
TAB	21	1.4072E-02		1.4069E-02		0.2340	0.5616	58.4 %
	41	5.6130E-03	1.37	5.6093E-03	1.37	0.9672	2.4648	60.8 %
	81	1.6973E-03	1.76	1.6968E-03	1.76	5.3820	11.5285	53.4 %

Resultados. Problema 2.

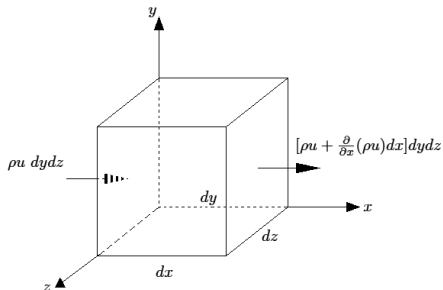
Malla	No	Error directo	Orden	Error iterativo	Orden	t	\hat{t}	Ahorro
ENG	21	9.6602E-02		1.1946E-01		0.1872	0.6396	70.8 %
	41	1.0796E-03	6.72	1.3285E-03	6.72	0.6708	2.6520	74.8 %
	81	6.5654E-03	-2.65	5.8604E-03	-2.18	5.9904	12.0589	50.4 %
HAB	21	7.9066E-04		7.9012E-04		0.2652	0.6552	59.6 %
	41	1.7011E-04	2.30	1.6983E-04	2.30	1.0608	2.8392	62.7 %
	81	4.5272E-04	-1.44	7.8058E-04	-2.24	6.0372	12.6361	52.3 %
MIC	21	5.5356E-04		5.5369E-04		0.2496	0.6240	60 %
	41	2.0389E-04	1.49	2.0414E-04	1.49	1.2324	2.8548	56.9 %
	81	3.2880E-05	2.68	3.2882E-05	2.68	5.6628	12.1525	53.5 %
TAB	21	2.7874E-03		2.7881E-03		0.2496	0.6240	60 %
	41	6.2938E-04	2.22	6.2963E-04	2.22	1.1700	2.7456	57.4 %
	81	6.5345E-04	-0.06	8.1611E-04	-0.38	5.5848	12.3241	54.7 %

Outline

- 1 Introducción
- 2 Notación
- 3 Esquema propuesto
- 4 Pruebas numéricas
- 5 Aplicación**
- 6 Conclusiones y Trabajo a Futuro

Teoría de Fluidos

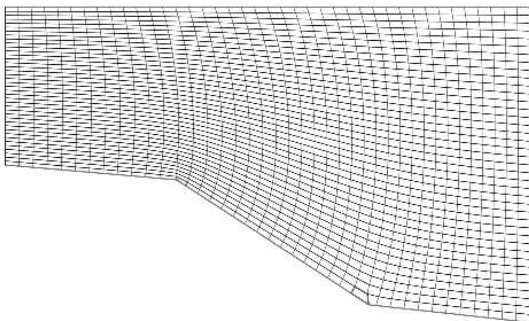
Como fue mencionado anteriormente, uno de los ejemplos físicos que pueden ser descritos por la ecuación de Poisson es el problema de un flujo de algún fluido a través de un conducto.



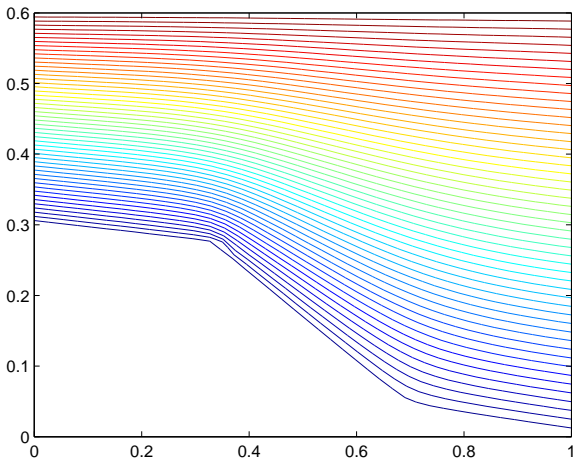
Tomando en cuenta las ecuaciones de conservación de la masa y la cantidad de movimiento y suponiendo que se trata de un fluido incompresible, irrotacional y no viscoso, podemos calcular el potencial.

Región Ω_1

$$\begin{aligned}\phi_{xx} + \phi_{yy} &= 0, & \phi_{ent} &= 10\text{m/s}, & \phi_{sal} &= 5\text{m/s}. \\ \mathcal{L}_{ent} &= 30\text{cm}, & \mathcal{L}_{sal} &= 60\text{cm}\end{aligned}$$

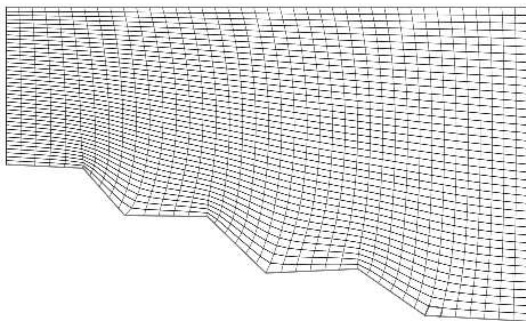


Región Ω_1

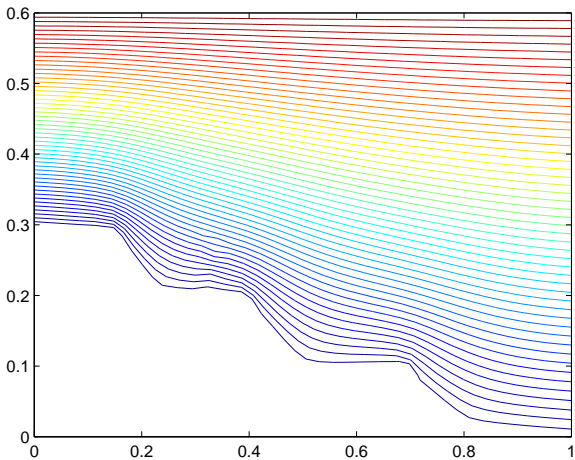


Región Ω_2

$$\begin{aligned}\phi_{xx} + \phi_{yy} &= 0, & \phi_{ent} &= 5m/s, & \phi_{sal} &= 2,5m/s. \\ \mathcal{L}_{ent} &= 30cm, & \mathcal{L}_{sal} &= 60cm\end{aligned}$$

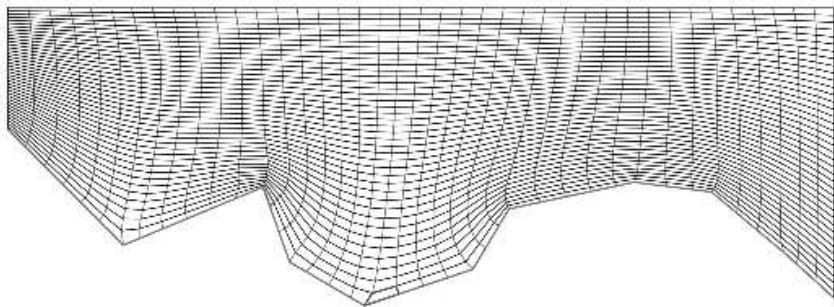


Región Ω_2

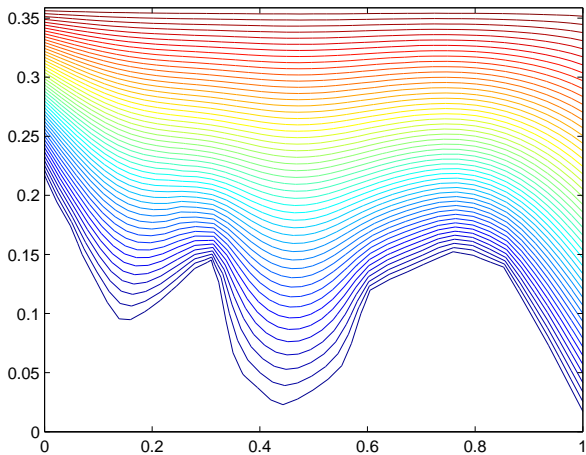


Región Ω_3

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0, \quad \phi_{ent} = 3m/s, \quad \phi_{sal} = 1,2m/s.$$
$$\mathcal{L}_{ent} = 14cm, \quad \mathcal{L}_{sal} = 35cm$$



Región Ω_3



Outline

- 1 Introducción
- 2 Notación
- 3 Esquema propuesto
- 4 Pruebas numéricas
- 5 Aplicación
- 6 Conclusiones y Trabajo a Futuro**

Conclusiones

- Se logró desarrollar un nuevo esquema simple de primer orden de diferencias finitas.
- Se logró economizar en cuanto al gasto de tiempo.
- La magnitud del error se mantiene en el mismo rango que en esquemas probados anteriormente y en ciertos casos incluso disminuye.

Trabajo a Futuro

- Actualmente se está trabajando una versión de este esquema para sistemas dependientes del tiempo.
- Se piensa hacer observaciones sobre lo que ocurre cuando las mallas no son convexas.