Suavizamiento de contornos
Una técnica para la reducción de puntos

Romualdo Mariano Matias
Universidad Autónoma de la Ciudad de México

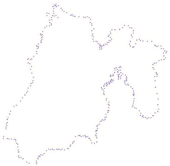
Pablo Barrera Sánchez
Guilmer González
Facultad de Ciencias, UNAM

Escuela Nacional de Optimización y Analisis Numérico

- Objetivo de la plática
- ¿Qué es un contorno?
- Formulación matemática del problema
- Puntos Dominantes
- Curvatura Máxima
- Colinealidad
- Perímetro Mínimo
- Comentarios finales

¿Objetivo de la plática?

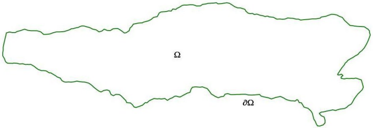
Dada una región plana irregular, queremos obtener un contorno similar más suave(que la información sea más compacta)



Para esto se construira una poligonal que cumpla:

1) Aproxime al contorno original.
2) Respete la forma de la curva.
3) Reduzca la cantidad de puntos.

¿Qué es un contorno?



Sea Ω una región acotada, simplemente conexa, y $\mathcal{C} = \partial\Omega$,

- $\mathcal{C} = \{(x, y)|\, f(x, y) = 0\}$
- $\mathcal{C} = \{\bar{\mathbf{x}}|\, t \in [a, b],\, \bar{\mathbf{x}}(a) = \bar{\mathbf{x}}(b)\}$
- $\mathcal{C} =$ Polígono $(P_1, P_2, \ldots, P_n, P_{n+1} = P_1)$
- $\mathcal{C} = CdigodeCadena$

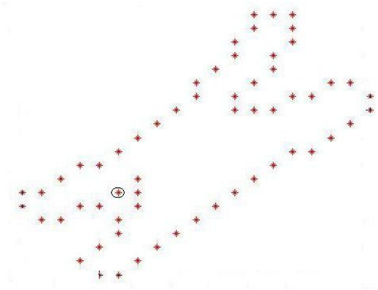
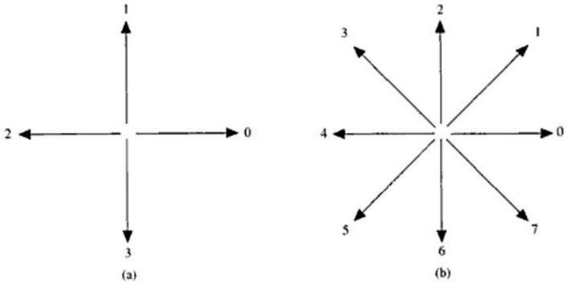


Figura: Contorno discreto del cromosoma

Qué es un Código de Cadena

Los códigos de Cadena se utilizan para representar un contorno por medio de una sucesión conexa de segmentos de longitud y dirección especificas.



Direcciones de: (a) código de cadena de 4 direcciones y (b) código de cadenas de 8 direcciones.

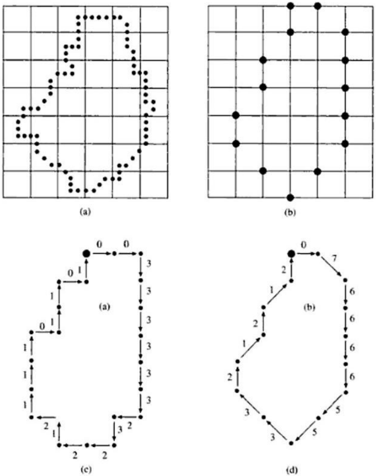


Figura: (a)contorno digital con el cuadriculado de muestreo superpuesto;(b)Resultado del muestreo;(c)código de cadena de 4 direcciones;(d)código de cadena de 8 direcciones

Formulación del problema

Sea

$$C = \{p_i = (x_i, y_i), i = 1, ..., m\}, p_{m+1} = p_1$$

una poligonal cerrada de digital de m-puntos ordenados que la describen.
El problema es encontrar una colección de n-puntos

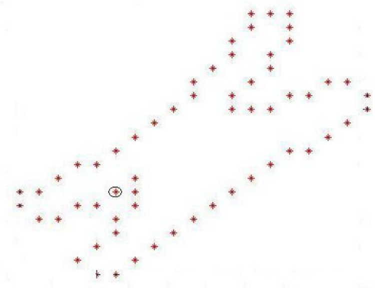
$$C' = \{p'_i = (x'_i, y'_i), i = 1, ..., n\}$$

de manera que:

1) n es significativamente más pequeño que m.
2) Los vértices de C' son un subconjunto ordenado de C.
3) los contornos son muy parecidos

Puntos dominantes

Diremos que un conjunto de puntos son dominantes de un contorno,si es posible reconstruir adecuadamente el contorno con esos puntos.



Los puntos dominantes serán los vértices del nuevo contorno.

En el trabajo que discutiremos, presentaremos tres técnicas heuristicas para detectarlos.

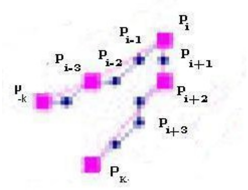
- Curvatura máxima
- Colinealidad por distancia máxima
- Perímetro mínimo

Curvatura máxima

Dado un valor de k para cada punto p_i del contorno definimos una vecindad

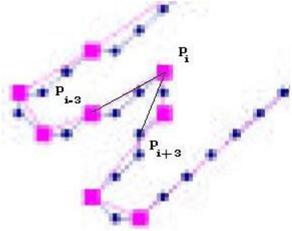
$$S(p_i) = \{p_{i-k}, ..., p_{i-1}, p_i, p_{i+1}, ..., p_{i+k}\}$$

Sobre ésta vecindad encontraremos la máxima curvatura acosiada a p_i usando el coseno del ángulo

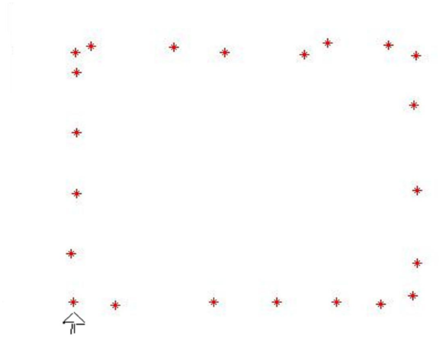


Para cada p_i calculamos el coseno del ángulo, entre el punto y los k-subsecuentes

$$cos_{ij} = cos(\overrightarrow{P_i P_{i+j}}, \overrightarrow{P_i, P_{i-j}}), \quad j = 1, ..., k$$



Tomemos un cuadrado formado por puntos con ruido como se muestra en laa figura de abajo.



Usando $k = 3$, calculamos los k-cosenos de cada punto.

cos_1	cos_2	cos_3
−0,1157	0,0155	−0,0100
−0,9934	−0,5169	−0,2379
−0,9994	−1,0000	−0,9127
−1,0000	−0,9999	−0,9981
−0,9993	−0,9956	−0,8408
−0,9416	−0,5532	−0,2407
−0,3983	−0,0935	−0,0464
−0,9946	−0,5276	−0,3419
−0,9995	−0,9706	−0,8013
−0,9979	−0,9535	−0,5941
−0,4532	−0,1899	−0,0045
−0,8881	0,0127	−0,0360
−0,8178	−0,6417	−0,3867
−0,8092	−0,9981	−0,8795
−0,9961	−0,9924	−0,9997
−0,9939	−0,9994	−0,9509
−0,8761	−0,3370	−0,1411
−0,4269	0,0105	0,0206
−0,9991	−0,3243	−0,1955
−1,0000	−0,9951	−0,7655
−0,9984	−0,9998	0,9972
−0,9959	1,0000	1,0000
−0,1157	0,0155	0,0100

Región de soporte

Identificamos h_i donde ocurre un cambio de orden de crecimiento

$$\cos_{im} < \cos_{i,m-1} < \ldots < \cos_{i,h_i} \geq \cos_{i,h_i-1} \, .$$

Curvatura máxima para cada punto y su radio de soporte

p_i	Valor máximo del coseno	h_i
1	0,0155	2
2	−0,2379	3
3	−0,9127	3
4	0,9981	3
5	−0,8408	3
6	−0,2407	3
7	−0,0464	3
8	−0,3419	3
9	−0,8013	3
10	−0,5941	3
11	−0,0045	3
12	0,0127	2
13	−0,3867	3
14	−0,8795	3
15	−0,9924	2
16	−0,9509	3
17	−0,1411	3
18	0,0206	3
19	−0,1955	3
20	−0,7655	3
21	0,9972	3
22	1,0000	3
23	0,0155	2

Puntos dominantes

Los puntos p_i donde $\cos_{i,h_i} \geq \cos_{j,h_j}$ para todo j tal que $|i-j| \leq \frac{h_i}{2}$ como la curvatura máxima.Esos serán los puntos dominantes.

Ejemplo

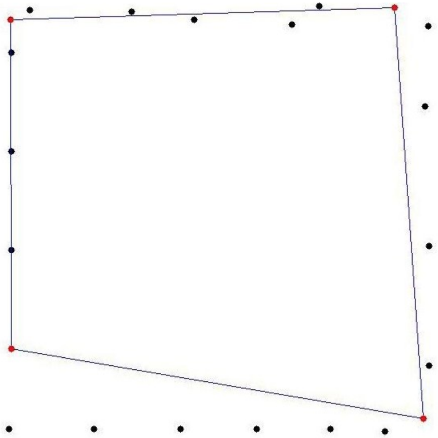
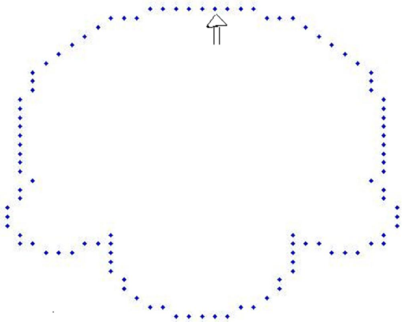


Figura: 22 puntos originales,4 puntos dominantes, para $k = 2$

Colinealidad por distancia ortogonal.

Ésta técnica identifica los puntos dominants como aquellos que no son colineales. La idea es fijar un punto digamos p_i y elegir una dirección, y detectar los puntos que no están alineados.



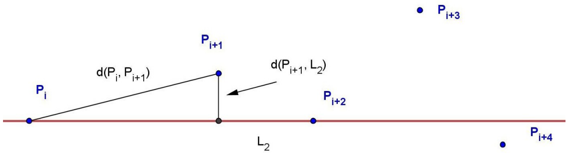
Criterio de distancia ortogonal

Tomando p_1 calculamos

$$F_1 = d(p_i, p_{i+1})$$

Formamos la recta L_2 que pasa por p_i a p_{i+2} y calculamos la distancia de p_{i+1} a la recta L_2 y hacemos

$$F_2 = d(p_i, p_{i+2}) - d(p_{i+1}, L_2)$$

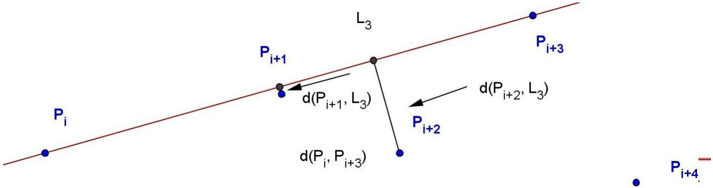


y si $F_2 > F_1$ continuamos

Criterio de distancia ortogonal

Formamos la recta L_3 que pasa por p_i a p_{i+3} y calculamos la distancia de p_{i+1} a la recta L_3 y la distancia de p_{i+2} a la recta L_3 y hacemos

$$F_3 = d(p_i, p_{i+1}) - d(p_{i+1}, L_3) - d(p_{i+2}, L_3)$$

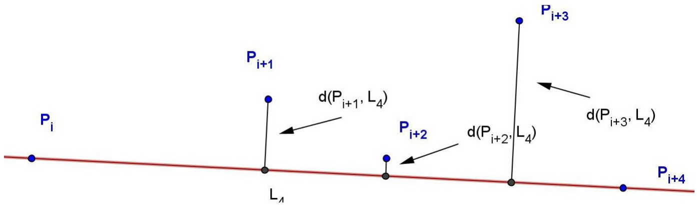


y si $F_3 > F_2$ continuamos

Criterio de distancia ortogonal

Formamos la recta L_4 que pasa por p_i a p_{i+4} y calculamos la distancia de p_{i+1} a la recta L_4, la distancia de p_{i+2} a la recta L_4 y la distancia p_{i+3} a la recta L_4y hacemos

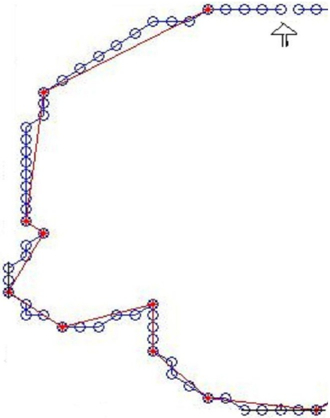
$$F_4 = d(p_i, p_{i+4}) - d(p_{i+1}, L_4) - d(p_{i+2}, L_3) - d(p_{i+3}, L_4)$$



y si $F_4 < F_3$, entonces P_{i+3}es un posible punto dominante.

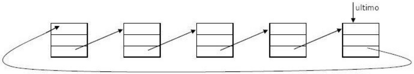
Criterio de distancia ortogonal

El punto p_{i+3} ahora será nuestro nuevo punto de referencia y aplicaremos el procedimiento anterior a partir de éste punto y en dirección del contorno.



Algoritmo

El algoritmo es simple: el contorno es una lista de datos, el útimo apunta al primero:



El procedimiento descrito lo repetimos en la dirección de la lista circular hasta que uno de los vértices se repita y entonces todos siguientes son dominantes incluyendo éste.

Ejemplo

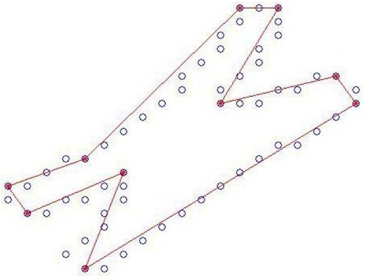


Figura: 60 puntos originales,10 puntos dominantes

Perímetro mínimo

En esta técnica no se eliminan puntos.
A cada punto p_i del contorno se le asigna una vecindad v_i de radio de r_i.

Función objetivo

La función :

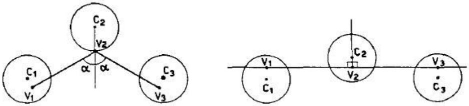
$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} [(x_{k+1} - x_i)^2 - (y_{k+1} - y_k)^2]^{\frac{1}{2}}$$

es minimizada, sujeta a las restricciones

$$p(x_i, y_i) \epsilon v_i, i = 1, \ldots, n$$

Propiedades

Dos situaciones pueden ocurrir:



a b

Ejemplo

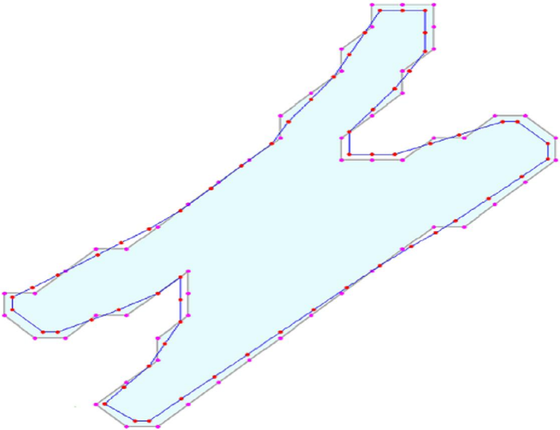


Figura: Cortorno original y suavizado

Comentarios finales

1) Para la primera técnica.
   Experimentar con el orden k de vecindad de estudio.
   Comparar los promedios de los cosenos.
   Es independiente del punto de inicio
2) Para la segunda técnica.
   Es dependiente del punto de inicio y la dirección que se elija.
   Un peso w adecuado nos permitiría ajustar el criterio de secciones del contorno.
3) Para la tercera técnica.
   No se eliminan puntos