Tarea VII de Álgebra Superior I
Semestre 2020-I
21 de noviembre de 2019

Profra: Gabriela Campero Arena — Ayudtes: Manuel Zúñiga y Mariana Garduño

1. Sea $F = \{0, 1, 2\}$, definimos una suma y una multiplicación en F por medio de las siguientes tablas:

$$\begin{array}{c|ccc} + & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} \cdot & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{array}$$

Demuestre que F junto con las operaciones arriba definidas es un campo.

2. Diga si los siguientes sistemas de ecuaciones definidos sobre el campo $\mathbb{R}$ son equivalentes, justificando su respuesta. Si sí lo son, exprese cada ecuación de cada sistema como combinación lineal de las ecuaciones del otro sistema:

(i)

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} 3x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

(ii)

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 0 \\ \frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{5}{2}x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x_1 \qquad - x_3 = 0 \\ \qquad x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

(iii)

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{y}$$

$$\begin{cases} -7x_1 \qquad - 7x_3 = -6 \\ x_1 + \frac{13}{2}x_2 + \frac{15}{2}x_3 = -1 \end{cases}$$

3. Sea $\mathcal{M}_{m\times n}(F)$ el conjunto de las matrices de $m \times n$ con entradas en el campo F. Demuestre que la relación "ser equivalente por renglones" definida sobre $\mathcal{M}_{m\times n}(F)$ es una relación de equivalencia, de ahí el nombre. (¡Observe que en varias tareas ya se ha mostrado que efectivamente las relaciones de equivalencia aparecen hasta por debajo de las piedras!)

4. Sea $\mathbb{R}$ el campo de los números reales y sea A la siguiente matriz con entradas en $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Encuentre todas las soluciones de $AX = 2X$ y todas las de $AX = 3X$. (La notación cX representa la matriz en la que cada elemento es c veces el correspondiente elemento de X.)

5. Demuestre que las siguientes dos matrices *no* son equivalentes por renglón:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 \\ b & c & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

6. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matriz con elementos complejos. Supóngase que A es reducida por renglones y que $a+b+c+d = 0$. Demuestre que existen exactamente tres de estas matrices.

7. Demuestre que el intercambio de dos renglones en una matriz puede hacerse por medio de un número finito de operaciones elementales de renglón de los otros dos tipos.

8. Considere el sistema de ecuaciones $AX = \bar{0}$, donde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y sus elementos están en un campo cualquiera F. Demuestre lo siguiente:

(i) Si todo elemento de A es 0, entonces todo par ordenado (x_1, x_2) de F es una solución de $AX = \bar{0}$.

(ii) Si $ad - bc \neq 0$, entonces el sistema $AX = \bar{0}$ tiene solamente la solución trivial $x_1 = x_2 = 0$.

(iii) Si $ad - bc = 0$ y algún elemento de A es diferente de 0, entonces existe una solución (y, z) tal que el par ordenado (x_1, x_2) de F es solución si y sólo si existe un escalar $c \in F$ tal que $x_1 = cy$ y $x_2 = cz$.

9. Describa explícitamente todas las matrices escalón reducidas por renglones de 2×2 en cualquier campo F.

10. Sea $\mathbb{R}$ el campo de los números reales. Utilice la técnica de obtener una matriz escalón reducida por renglones para decir si los siguientes sistemas de ecuaciones tienen solución y, si sí, dé las soluciones:

$$\text{(i)} \begin{cases} \frac{1}{3}x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0 \\ -4x_1 \qquad + 5x_3 = 0 \\ -3x_1 + 6x_2 - 13x_3 = 0 \\ -\frac{7}{3}x_1 + 2x_2 - \frac{8}{3}x_3 = 0 \end{cases};$$

$$\text{(ii)} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - x_4 = 3 \end{cases};$$

$$\text{(iii)} \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 \qquad + 2x_3 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases};$$

$$\text{(iv)} \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 7x_3 + 5x_4 + 2x_5 = -2 \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 + x_5 = -2 \\ 2x_1 \qquad - 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 3 \\ x_1 - 5x_2 - 7x_3 + 6x_4 + 2x_5 = -7 \end{cases}.$$

11. Dé un ejemplo de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que no tenga solución.

12. (i) Sea A la siguiente matriz con entradas en $\mathbb{R}$: $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ ¿Para cuáles ternas (y_1, y_2, y_3) tiene solución el sistema $AX = Y$ donde $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$?

(ii) Sea A la siguiente matriz con entradas en $\mathbb{R}$: $\begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ¿Para cuáles 4-adas (y_1, y_2, y_3, y_4) tiene solución el sistema $AX = Y$ donde $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$?

13. Supóngase que R y R' son matrices de 2×3 escalón reducidas por renglones y que los sistemas $RX = \bar{0}$ y $R'X = \bar{0}$ tienen exactamente las mismas soluciones. Demostrar que $R = R'$.

14. Calcule todas las multiplicaciones que estén definidas entre las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 5 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

15. Encuentre dos matrices de 2×2 diferentes tales que $A^2 = \mathbf{0}$, pero $A \neq \mathbf{0}$.

16. Sea $C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$. Se desea saber si es posible encontrar matrices A y B de 2×2 tales que $C = AB - BA$. Demuestre que tales matrices pueden hallarse si y sólo si $C_{11} + C_{22} = 0$.

17. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Halle una matriz escalón reducida por renglones que sea equivalente a A, y una matriz invertible de 3×3 P tal que $R = PA$.

18. Determine si las siguientes matrices son inversibles y si lo son, encuentre su inversa.

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

19. Sea $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. ¿Para qué matriz X, existe un escalar c tal que $AX = cX$?

20. Suponga que A es una matriz de 2×1 y B es una matriz de 1×2. Demuestre que $C = AB$ no es invertible.

21. Sea A una matriz cuadrada de $n \times n$. Demuestre lo siguiente:

(i) Si A es invertible y $AB = 0$ para alguna matriz B de $n \times n$, entonces $B = 0$.
(ii) Si A no es invertible, entonces existe una matriz B de $n \times n$ tal que $AB = 0$, pero con $B \neq 0$.