Ejercicios para el Examen VI de Álgebra Superior I
Semestre 2020-I
7 de noviembre de 2019

Profra: Gabriela Campero Arena — Ayudtes: Manuel Zúñiga y Mariana Garduño

### Cardinalidad de conjuntos finitos

1. Demuestre lo siguiente.

(i) Para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $I_{\mathfrak{s}(n)} = I_n \cup \{\mathfrak{s}(n)\}$.

(ii) Para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$, $n < m$, si y sólo si $I_n \subsetneq I_m$.

(iii) Para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$, $I_{m+n} = I_m \cup \{m+1, m+2, ..., m+n\}$ y que $I_m \cap \{m+1, m+2, ..., m+n\} = \varnothing$.

2. Diga cuáles de los siguientes conjuntos son finitos y establezca la cardinalidad de aquellos conjuntos que sean finitos:

(i) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x < 5\}$ (iv) $\{x \in \mathbb{N} \mid x < 1000\}$

(ii) $\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 3 = 0\}$ (v) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq 36\}$

(iii) $\{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < 1\}$ (vi) $\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 27\}$

3. Sean $I_3 = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c\}$ con $a \neq b \neq c \neq a$, encuentre todas las biyecciones entre $I_3$ y $B$.

4. Sea $X$ un conjunto cualquiera. Demuestre que la relación "tener la misma cardinalidad" definida sobre los subconjuntos de $X$, es decir, sobre $\mathcal{P}(X)$ es una relación de equivalencia.

5. En la demostración del Lema 6.13 inciso (i) verifique que la función $h$ ahí definida es inyectiva.

6. Sea $n \in \mathbb{N}$. Pruebe que cualquier función sobre $f : I_n \to I_n$ es inyectiva.

7. Pruebe que para cualesquiera $n \in \mathbb{N}^+$ y $m \in \mathbb{N}$, existe una función sobre $f : I_m \to I_n$ si y sólo si $m \geq n$.

8. Revise ejemplos de funciones cuyos dominios y codominios sean infinitos (por ejemplo, $\mathbb{N}$, o $\mathbb{Z}$, o $\mathbb{Q}$, o $\mathbb{R}$) que sean inyectivas y no suprayectivas, y que sean suprayectivas y no inyectivas para constatar la importancia de la hipótesis de que $A$ sea un conjunto *finito* en el corolario 6.12.

### Principios elementales de combinatoria

9. En la demostración del Principio de la suma, es decir, del teorema 6.16 definimos, dadas las biyecciones $f : I_m \to A$ y $g : I_n \to B$, a la función $h : I_{m+n} \to A \cup B$ como:

$$h(j) = \begin{cases} f(j) & \text{si } j \leq m, \\ g(j-m) & \text{si } j > m. \end{cases}$$

Demuestre que $h$ es biyectiva.

10. Sean $X$, $X'$, $Y$, $Y'$ conjuntos y $m$ y $n$ números naturales tales que:

(a) $|X| = |X'| = m$ y $|Y| = |Y'| = n$

(b) $X \cap Y = \varnothing$ y $X' \cap Y' = \varnothing$.

Demuestre que el número natural $|X \cup Y|$ es igual a $|X' \cup Y'|$.

11. Sean $k$ un natural tal que $k \geq 2$ y $A_1$, ..., $A_k$, $A_{k+1}$ conjuntos. Demuestre que si $A_i \cap A_j = \varnothing$, siempre que $i \neq j$, entonces $(A_1 \cup \ldots \cup A_k)$ y $A_{k+1}$ son ajenos.

12. Para justiciar el penúltimo paso del Corolario 6.19, se necesita el inciso (ii) siguiente, generalización del inciso (i):

(i) $\forall n, m, k, t \in \mathbb{N}((n \leq m \wedge k \leq t) \Rightarrow n + k \leq m + t)$

(ii) Si para todo $i \in I_k$, se tiene que $n_i \in \mathbb{N}$ y $m_i \in \mathbb{N}$ y que $n_i \leq m_i$, entonces $\Sigma_{i=1}^{k} n_i \leq \Sigma_{i=1}^{k} m_i$.

13. Demuestre que existe $f : I_m \to I_n$ inyectiva si y sólo si $m \leq n$.

14. Demuestre que:

(i) Si $A$ y $B$ son conjuntos finitos y $f : A \to B$ es una función sobre, entonces $|A| \geq |B|$.

(ii) Si $A$ y $B$ son conjuntos finitos y $f : A \to B$ es una función inyectiva, entonces $|A| = |f[A]|$. Concluya con el ejercicio anterior que $|A| \leq |B|$.

15. Demuestre la generalización del Principio del palomar: Si se distribuyen $m$ palomas en $n$ casillas y $m > nr$ para algún $r \geq 1$, entonces al menos una casilla tiene más de $r$ palomas.

16. Demuestre que:

(i) Si $A$ y $B$ son conjuntos finitos (no necesariamente ajenos), entonces $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

(ii) Proponga una fórmula que generalice la del ejercicio anterior con tres conjuntos finitos (no necesariamente ajenos por pares) $A$, $B$ y $C$.

17. En la demostración del Principio del producto, es decir, del teorema 6.22 definimos suponiendo que $|A| = m$ y $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ para cada $i \in I_m$ a las funciones:

$f_i : \{a_i\} \times B \to B$ como $f_i(a_i, b) = b$.

(i) Demuestre que para toda $i \in I_m$, $f_i$ es una biyección.

(ii) Demuestre que el conjunto $P = \{\{a_i\} \times B : i \in I_m\}$ es una partición de $A \times B$.

**Ordenaciones con repetición, ordenaciones y permutaciones**

18. Demuestre que para toda $m \geq 1$, $O_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$.

19. Conteste lo siguiente, justificando su respuesta:

(i) ¿Cuántas placas distintas se puden asignar en la Ciudad de México sabiendo que las placas tienen tres números (del 0 al 9) y tres letras (contando 26 en el abecedario)?

(ii) ¿Cuántas placas distintas se puden asignar en la Ciudad de México tales que en la sección de números no empiecen con cero?

(iii) ¿Cuántas placas distintas se puden asignar en la Ciudad de México tales que en la sección de números no empiecen con cero y que tengan al menos una -A-?

(iv) ¿Cuántas placas distintas se puden asignar en la Ciudad de México tales que en la sección de números no empiecen con cero y que tengan a lo más dos -A-?

20. Supongamos que tenemos 12 libros, 4 de matemáticas, 3 de química, 3 de biología y dos de física. Conteste las siguientes preguntas, justificando su respuesta:

(i) ¿Cuántas maneras hay de arreglar los libros en un estante si se quiere acomodarlos por materias?

(ii) ¿Cuántas maneras hay de arreglar los libros en un estante si se quiere acomodarlos por materias y que los de física queden junto a los de matemáticas?

(iii) ¿Cuántas maneras hay de arreglar los libros en un estante si se quiere acomodarlos por materias, que los de física queden junto a los de matemáticas y que los de química y biología *no* queden juntos?

(iv) ¿Cuántas maneras hay de arreglar los libros en un estante si se quiere acomodarlos por materias, que los de física queden junto a los de matemáticas, que los de química y biología *no* queden juntos y que los de física y química queden juntos?

21. Sabemos que un grupo de 10 personas cenará en una mesa con 10 lugares. Conteste las siguientes preguntas, justificando su respuesta:

(i) ¿Cuántas maneras distintas hay de sentar a la mesa las 10 personas?

(ii) Si la mesa es rectangular y se quiere sentar al dueño de la casa en alguna de las cabecera ¿Cuántas maneras distintas hay de sentar a la mesa las 10 personas?

(iii) Si la mesa es rectangular y se quiere sentar al dueño de la casa en alguna de las cabeceras y se quiere que Manuel se siente junto a Graciela (dos de los invitados) ¿Cuántas maneras distintas hay de sentar a la mesa las 10 personas?

(iv) Si hay 3 mujeres y 7 hombres, la mesa es rectangular, se quiere sentar al dueño de la casa en alguna de las cabeceras y se quiere que alguna mujer esté sentada junto a otra ¿Cuántas maneras distintas hay de sentar a la mesa las 10 personas?

22. Conteste las siguientes preguntas, justificando su respuesta:

(i) ¿Cuántas palabras (sucesiones de letras) distintas se pueden formar revolviendo las letras de la palabra -MATEMATICA-?

(ii) ¿Cuántas palabras (sucesiones de letras) distintas se pueden formar de 5 letras con las letras de la palabra -MATEMATICA- de tal manera que una letra se use a lo más cuantas veces aparece en -MATEMATICA-?

23. Conteste las siguientes preguntas, justificando su respuesta:

(i) De un conjunto de 10 personas ¿Cuántas maneras hay de asignar un comité con un presidente, un secretario, un tesorero y un vocal?

(ii) De un conjunto de 10 personas de las cuales 6 son hombres y 4 mujeres ¿Cuántas maneras hay de asignar un comité con un presidente, un secretario, un tesorero y un vocal en las que el presidente sea una mujer?

(iii) De un conjunto de 10 personas de las cuales 6 son hombres y 4 mujeres ¿Cuántas maneras hay de asignar un comité con un presidente, un secretario, un tesorero y un vocal en las que el presidente sea una mujer y al menos dos sean hombres?

(iv) De un conjunto de 10 personas de las cuales 6 son hombres y 4 mujeres ¿Cuántas maneras hay de asignar un comité con un presidente, un secretario, un tesorero y un vocal en las que el presidente sea una mujer y a lo más dos sean hombres?

24. En puesto de periódicos se venden diariamente cuatro periódicos distintos. Conteste las siguientes preguntas, justificando su respuesta:

(i) Supongamos que en cada uno de los cinco días laborales de la semana puede comprarse uno de los cuatro periódicos ¿De cuántas maneras puede hacer esto?

(ii) Supongamos que en cada uno de los cinco días laborales de la semana puede comprarse uno de los cuatro periódicos, pero que los lunes quiere comprar el Esto o el Novedades ¿De cuántas maneras puede hacer esto?

(iii) Supongamos que en cada uno de los cinco días laborales de la semana puede comprarse uno de los cuatro periódicos, pero que los lunes quiere comprar el Esto o el Novedades y el martes no quiere comprar el que haya comprado el lunes ¿De cuántas maneras puede hacer esto?

25. Sea $M$ el conjunto de las notas musicales de la escala mayor en "Do". Es decir, $M = \{Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si\}$, o en la notación estándar $M = \{C, D, E, F, G, A, B\}$. Un *acorde* es un arreglo ordenado de 3 o más notas que se tocan simultáneamente de la forma, por ejemplo: $\begin{array}{|c|}\hline C\\ \hline E\\ \hline C\\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline G\\ \hline B\\ \hline D\\ \hline F\\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline D\\ \hline F\\ \hline A\\ \hline C\\ \hline E\\ \hline\end{array}$

Si $n \geq 3$, podemos ver al conjunto de todos los acordes de $n$ notas como $M^n$.

(i) ¿Cuántos posibles acordes de 3 notas hay sobre el conjunto $M$?

(ii) ¿Cuántos de 5 notas que no tengan la nota "E" (Mi) y no empiecen con "G" (Sol)?

(iii) ¿Cuántos de 4 notas en los que aparezcan juntas 2 notas consecutivas?

Una *inversión* de un acorde $X$ es un acorde $Y$ que tiene las mismas notas que $X$ pero en otro orden. Es decir, $Y$ es una premutación de $X$. Definamos la relación $\sim$ sobre $M^n$ como $X \sim Y$ si y sólo si existe $\sigma : X \to Y$ biyectiva, es decir, si $X$ es una inversión o una permutación de $Y$.

(iv) Pruebe que $\sim$ es una relación de equivalencia, por lo que podemos definir el conjunto cociente $M^n/\sim$. ¿Qué representaría un elemento $x \in M^n/\sim$?

(v) ¿Cuántos posibles acordes salvo inversión hay?

### Combinaciones y la expansión binomial

26. En la demostración del Lema 6.47, verifique que efectivamente $g$ es la función inversa de $f$.

27. Para toda $n \in \mathbb{N}^+$, $\frac{2^{2n-1}}{n} \leq \binom{2n}{n} \leq 2^{2n-1}$. *Sugerencia:* Hágalo por inducción.

28. Sean $a, b \in \mathbb{N}$ no ambos cero y tales que $a \geq b$. Para toda $n \in \mathbb{N}^+$, $a^{2n} - b^{2n}$ es múltiplo de $(a+b)$, es decir, hay $x \in \mathbb{N}$ tal que $a^{2n} - b^{2n} = (a+b)x$. *Sugerencia:* Hágalo por inducción.

29. Demuestre lo siguiente:

(i) Utilizando el Teorema del Binomio demuestre que si $n$ es un natural par, *i.e.* $n = 2k$ para alguna $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$\binom{2k}{0} + \binom{2k}{2} + \cdots + \binom{2k}{2k} = \binom{2k}{1} + \binom{2k}{3} + \cdots + \binom{2k}{2k-1}$$

y si $n$ es un natural impar, *i.e.* $n = 2k+1$ para alguna $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$\binom{2k+1}{0} + \binom{2k+1}{2} + \cdots + \binom{2k+1}{2k} = \binom{2k+1}{1} + \binom{2k+1}{3} + \cdots + \binom{2k+1}{2k+1}$$

(ii) Demuestre por inducción que todo conjunto finito tiene la misma cantidad de subconjuntos con un número par de elementos que con un número impar.

30. Pruebe lo siguiente:

(i) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

(ii) Si $n \geq 1$ entonces $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$

31. (i) Demuestre que para cualquier número natural $n$ se tiene la siguiente igualdad:

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

*Sugerencia:* Fíjese en el coeficiente de $x^n$ al desarrollar ambos miembros de la igualdad $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$

(ii) Encuentre el término que no contiene a $x$ en el desarrollo de $(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}})^9$.

32. Conteste las siguientes preguntas:

(i) De un conjunto de 24 personas ¿Cuántos equipos de futbol se pueden formar (un equipo tiene 11 personas)?

(ii) De un conjunto de 24 personas, se ha elegido un capitán que siempre debe jugar ¿Cuántos equipos de futbol se pueden formar?

(iii) De un conjunto de 24 personas de las cuales 16 son hombres y 8 mujeres ¿Cuántos equipos de futbol se pueden formar en los que haya dos mujeres?

(iv) De un conjunto de 24 personas de las cuales 16 son hombres y 8 mujeres ¿Cuántos equipos de futbol se pueden formar en los que haya al menos dos mujeres?

33. Considere un polígono regular de $n$ lados ¿Cuántas diagonales se pueden trazar en este polígono?

34. El dominó contiene 28 fichas y una mano consta de 7 fichas;

(i) ¿Cuántas manos distintas de dominó hay?

(ii) ¿Cuántas manos distintas hay en la que aparezcan 2 mulas (una mula es una ficha doble)?

(iii) ¿Cuántas manos distintas hay en la que aparezcan 4 fichas con el mismo número (los números van del 0 al 6)?

(iv) ¿Cuántas manos distintas hay en la que aparezcan 2 mulas y 4 fichas con el mismo número?

35. En el póker hay 52 cartas y una mano consta de 5 cartas;

(i) ¿Cuántas manos posibles de póker hay?

(ii) ¿Cuántas manos de póker hay que no tengan un par (dos cartas con el mismo número)?

(iii) ¿Cuántas manos de póker hay en las que aparezcan al menos dos cartas del mismo número?

(iv) ¿Cuántas manos de póker hay en las que aparezca una tercia (tres cartas del mismo número)?

(v) ¿Cuántas manos de póker hay en las que aparezca una tercia, pero que *no* sea ful (una tercia y un par)?

(v) ¿Cuántas manos de póker hay que sean ful?

36. En uno de los cursos de Álgebra Superior se sabe que hay 12 alumnos hombres y que cada uno de ellos es amigo de exactamente 5 de sus condicípulas. Si cada alumna es amiga de exactamente 4 de sus compañeros ¿Cuántas alumnas hay en el curso?

37. De los 32 equipos de futbol que participan en el Mundial, cerca del término del torneo quedan 4 equipos semifinalistas que se disputan los 4 primeros lugares. Los 32 equipos están divididos en 8 grupos iniciales (por sorteo) de 4, de los cuales pasan 2 a los octavos de final.

(i) ¿De cuántas maneras pueden resultar las eliminatorias iniciales para determinar los primeros cuatro lugares?

(ii) ¿De cuántas maneras pueden resultar las eliminatorias iniciales para determinar los primeros cuatro lugares si Brasil siempre debe ser uno de ellos?

(iii) ¿De cuántas maneras pueden resultar las eliminatorias iniciales para determinar los primeros cuatro lugares si no es posible que entre ellos estén Brasil y Argentina?