Tarea 6 de Álgebra Lineal I
Semestre 2019-I
15 de noviembre de 2018

Profra: Gabriela Campero Arena | Ayudtes: Yanh Vissuet, Mariana Garduño y Carlos Ochoa

I.Diagonalización

1. Sea $A \in M_{n\times n}(F)$. Demuestre que un escalar λ es un eigenvalor de A si y sólo si $det(A-\lambda I)=0$.
2. Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial V (de cualquier dimensión) y sea λ un eigenvalor para T. Demuestre que $v \in V$ es un eigenvector de T correspondiente al eigenvalor λ si y sólo si $v \neq \overline{0}$ y $v \in N(T-\lambda I)$.
3. Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial V (de cualquier dimensión) y sean $\lambda_1, ..., \lambda_k$ eigenvalores distintos de T. Si $v_1, ..., v_k$ son eigenvectores de T que corresponden a los eigenvalores $\lambda_1, ..., \lambda_k$ respectivamente, entonces $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ es linealmente independiente.
4. Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial V (de cualquier dimensión) y sean $\lambda_1, ..., \lambda_k$ eigenvalores distintos de T. Si $v_1, ..., v_k$ son tales que para cada $i \in \{1, ..., k\}$, $v_i \in E_{\lambda_i}$ y $v_1 + ... + v_k = \overline{0}$, entonces $\forall i \in \{1, ..., k\}(v_i = \overline{0})$.
5. Para las siguientes matrices $A \in M_{n\times n}(F)$,
   (i) determine todos los eigenvalores de A;
   (ii) para cada eigenvalor λ de A, encuentre el conjunto de eigenvectores correspondiente a λ;
   (iii) si es posible, encuentre una base para F^n consistente de eigenvectores de A;
   (iv) si encuentra tal base, determine una matriz invertible Q y una matriz diagonal D tal que $Q^{-1}AQ = D$.

   (i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, con $F=\mathbb{R}$;
   (ii) $A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 2 & -i \end{pmatrix}$, con $F=\mathbb{C}$.
6. Para cada operador lineal T sobre V, encuentre los eigenvalores de T y una base ordenada β de V de forma que $[T]_\beta$ sea diagonal. **Nota:** Estos ejercicios y los anteriores sí salen, pero para entender por qué salen hay que tomar Álgebra Lineal II (ya me había tardado...).
   (i) $V=\mathbb{R}^2$ y $T(a,b) = (-2a+3b, -10a+9b)$;
   (ii) $V = P_2(\mathbb{R})$ y $T(f(x)) = xf'(x) + f(2)x + f(3)$.
7. Sea T un operador lineal definido sobre un espacio de dimensión finita V y sea β una base ordenada para V. Pruebe que λ es un eigenvalor de T si y sólo si λ es un eigenvalor para $[T]_\beta$.
8. Sea T un operador lineal definido sobre un espacio de dimensión finita V. Definimos el *determinante de* T, denotado $det(T)$, como sigue: elija una base ordenada cualquiera β para V, y defina $det(T) = det([T]_\beta)$.
   (i) Pruebe que la definición anterior es independiente de la elección de la base ordenada para V, es decir, pruebe que si β y γ son bases ordenadas para V, entonces $det([T]_\beta) = det([T]_\gamma)$.
   (ii) Pruebe que para cualquier escalar λ y cualquier base ordenada β para V, $det(T-\lambda I_V) = det([T]_\beta) - \lambda I$.
   (iii) T es invertible si y sólo si $det(T) \neq 0$. En tal caso, $det(T^{-1}) = (det(T))^{-1}$.
   (iv) Si U es un operador lineal en V, $det(TU) = det(T)det(U)$.
9. Pruebe que los eigenvalores de una matriz triangular superior M son las entradas en la diagonal de M.
10. Demuestre lo siguiente:
    (i) Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial de dimensión n. Si T tiene n eigenvalores distintos, entonces T es diagonalizable.
    (ii) Si $A \in M_{n\times n}(F)$ tiene n eigenvalores distintos, entonces A es diagonalizable.
11. Demuestre que un operador lineal T en un espacio vectorial de dimensión finita es diagonalizable si y sólo si V es la suma directa de los eigenespacios de T.

II. Ortogonalidad A partir de ahora F es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

12. Sea $V = C([0,1)]$ el espacio de las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en el intervalo $[0,1]$. Demuestre que la función $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ es un producto interno.

13. Sea V un espacio con producto interno sobre F. Demuestre lo siguiente.

    (i) $\forall x, y, z \in V(\langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle)$

    (ii) $\forall x, y \in V \forall c \in F(\langle x, cy\rangle = \overline{c}\langle x, y\rangle)$.

    (iii) $\forall x \in V(\langle x, \overline{0}\rangle = \langle \overline{0}, x\rangle = 0)$.

    (iv) $\forall x \in V(\langle x, x\rangle = 0 \iff x = \overline{0})$.

    (v) $\forall v \in V(\forall u \in V \langle u, v\rangle = 0 \implies v = \overline{0})$.

    (vi) $\forall y, z \in V(\forall x \in V \langle x, y\rangle = \langle x, z\rangle \implies y = z)$.

14. Sea β una base para un espacio vectorial de dimensión finita con producto interior V.

    (i) Sea $x \in V$. Pruebe que si $\forall z \in \beta$ $(\langle x, z\rangle = 0)$, entonces $x = 0$.

    (ii) Sean $x, y \in V$. Pruebe que si $\forall z \in \beta$ $(\langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle)$, entonces $x = y$.

15. Sea V un espacio con producto interior sobre F. Demuestre lo siguiente.

    (i) $\forall x \in V \forall c \in F(||cx|| = |c|\,||x||)$.

    (ii) $\forall x \in V(||x|| \geq 0)$ y $\forall x \in V(||x|| = 0 \iff x = \overline{0})$.

    (iii) $\forall x, y \in V |\langle x, y\rangle| \leq ||x||\,||y||$.

    (iv) $\forall x, y \in V ||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$.

16. (i) Sea V un espacio con producto interior y supongamos que x y y son ortogonales en V. Pruebe que $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$. Deduzca el Teorema de Pitágoras para $\mathbb{R}^2$.

    (ii) Pruebe la *ley del paralelogramo* para un espacio con producto interno V; esto es, pruebe que $\forall x, y \in V$, $||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2$. ¿Qué nos dice esta ecuación acerca de los paralelogramos en $\mathbb{R}^2$?.

    Definición: Sea V un espacio vectorial sobre F, con $F = \mathbb{R}$ ó $F = C$. Sin importar si V cuenta o no con un producto interior, podemos definir una norma $||\cdot||$ como una función que toma valores reales y definida sobre V que cumpla las siguientes condiciones:

    (1) $\forall x \in V ||x|| \geq 0$ y $\forall x \in V ||x|| = 0$ si y sólo si $x = 0$.

    (2) $\forall x \in V \forall a \in F ||ax|| = |a| \cdot ||x||$.

    (3) $\forall x, y \in V ||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$.

17. Pruebe que las siguientes funciones son normas en el espacio vectorial V dado.

    (i) $V = M_{n\times n}(F)$; $||A|| = max\{|A_{ij}|\ \ 1 \leq i, j \leq n\}$ $\forall A \in V$.

    (ii) $V = C([0,1])$; $||f|| = max\{|f(t)|\ \ t \in [0,1]\}$ $\forall f \in V$.

    (iii) $V = \mathbb{R}^2$; $||(a,b)|| = max\{|a|, |b|\}$ $\forall (a,b) \in V$.

18. Utilice el ejercicio 16 para probar que no hay ningún producto interno definido en $\mathbb{R}^2$ que induzca la norma definida en el ejercicio 17(iii).

19. Sea T un operador lineal sobre un espacio con producto interno V y supóngase que $||T(x)|| = ||x||$. Demuestre que entonces T es inyectiva.

20. Sea V un espacio vectorial sobre F y sea W un espacio con producto interno sobre F con el producto interno $\langle \cdot, \cdot\rangle$. Si $T : V \to W$ es lineal, demuestre que $\langle x, y\rangle' = \langle T(x), T(y)\rangle$ es un producto interno para V si y sólo si T es inyectiva.

21. Sea V un espacio con producto interno sobre F. Si S es un subconjunto ortogonal de V que consiste de vectores no nulos y $y \in \langle S\rangle$, demuestre que existen $v_1, ..., v_k \in S$ tales que

$$y = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle y, v_i\rangle}{||v_i||^2} v_i.$$

22. Sea V un espacio con producto interno sobre F. Si S es un subconjunto ortonormal de V y $y \in \langle S \rangle$, demuestre que existen $v_1, ..., v_k \in S$ tales que

$$y = \sum_{i=1}^{k} \langle y, v_i \rangle v_i.$$

23. Demuestre que si S es un subconjunto ortogonal de vectores no nulos de un espacio con producto interno V, entonces S es linealmente independiente.

24. Aplique el procedimiento de Gram-Schmidt (que vamos a demostrar que funciona en Álgebra Lineal II, no se lo pierdan...) al subconjunto dado S del espacio con producto interno V para obtener una base ortogonal para $\langle S \rangle$. Después, normalice los vectores en esta base para obtener una base ortonormal β para $\langle S \rangle$.

    (i) $V = \mathbb{R}^3$; $S = \{(1,0,1), (0,1,1), (1,3,3)\}$; $x = (1,2,2)$;

    (ii) $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$; $S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -12 \\ 3 & -16 \end{pmatrix} \right\}$; $A = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 25 & -13 \end{pmatrix}$.

25. Sea V un espacio con producto interno y sea W un subespacio de dimensión finita de V. Demuestre que si $x \notin W$, entonces existe $y \in V$ tal que $y \in W^{\perp}$, pero $\langle x, y \rangle \neq 0$.

26. Sea β una base para un subespacio W de un espacio con producto interno V y sea $z \in V$. Demuestre que $z \in W^{\perp}$ si y sólo si $\forall v \in \beta \; \langle z, v \rangle = 0$.

27. Sean V un espacio con producto interno, S y S_0 subconjuntos de V y W un subespacio de dimensión finita de V. Pruebe que:

    (i) $S_0 \subseteq S \Rightarrow S^{\perp} \subseteq S_0^{\perp}$;

    (ii) $S \subseteq (S^{\perp})^{\perp}$, y por tanto $\langle S \rangle \subseteq (S^{\perp})^{\perp}$;

    (iii) $W = (W^{\perp})^{\perp}$;

    (iv) $V = W \oplus W^{\perp}$.