Ejercicios para el Examen V de Álgebra Superior I
Semestre 2020-I
27 de octubre de 2019

Profra: Gabriela Campero Arena — Ayudtes: Manuel Zúñiga y Mariana Garduño

1. Recordemos la idea de la definición de *von Neumann* para el conjunto de los números naturales:

(a) $\varnothing$ es un número natural.

(b) Si n es un número natural, entonces $n \cup \{n\}$ es un *número natural*.

(c) Los *números naturales* son los conjuntos que se obtienen de la aplicación repetida de las reglas (a) y (b) anteriores.

Haciendo $\varnothing = 0$, $s(n) = n \cup \{n\}$ y $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales, demuestre que esta definición cumple los primeros tres axiomas de Peano.

2. De manera similar a como se justificaron las definiciones de la suma y la multiplicación de los naturales usando el Teorema de Recursión, justifique la definición dada de la operación exponenciación.

3. Dada la definición de $\mathbb{N}$ en el ejercicio 1, podemos definir lo siguiente:

(i) Demuestre que para cualesquiera naturales n y m, $m \in n$ si y sólo si $m \subsetneq n$. *Sugerencia:* Sea $A = \{n \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N}(m \in n \Rightarrow m \subsetneq n)\}$. Use el Principio de Inducción para probar que $A = \mathbb{N}$. Después vea que $B = \{n \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N}(m \subsetneq n \Rightarrow m \in n)\}$ es también todo $\mathbb{N}$ usando el Principio de Inducción y usando que $A = \mathbb{N}$.

(ii) Pruebe que para todos los números naturales n, $n \notin n$.

4. Demuestre las siguientes afirmaciones respecto de la suma en los naturales:

(i) (a) $\forall n \in \mathbb{N}(0 + n = n)$.
(b) $\forall a, n \in \mathbb{N}(a + s(n) = s(a) + n)$.
(c) $\forall n, m \in \mathbb{N}(s(a) + n = s(a + n))$.
(d) $\forall a, n \in \mathbb{N}(a + n = n + a)$, es decir, la suma en $\mathbb{N}$ es conmutativa.

(ii) $\forall a, n \in \mathbb{N}(a \neq 0 \Rightarrow a + n \neq 0)$.

(iii) $\forall a, b \in \mathbb{N}(a + b = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \wedge b = 0))$.

5. Demuestre las siguientes afirmaciones respecto de la multiplicación en $\mathbb{N}$:

(i) $\forall n \in \mathbb{N}(1 \cdot n = n)$

(ii) $\forall a, b, n \in \mathbb{N}((a + b) \cdot n = (a \cdot n) + (b \cdot n))$, es decir, la multiplicación distribuye a la suma en $\mathbb{N}$.

(iii) (a) $\forall m \in \mathbb{N}(0 \cdot m = 0)$
(b) $\forall n, m \in \mathbb{N}(n \cdot m = m \cdot n)$, es decir, la multiplicación en $\mathbb{N}$ es conmutativa.

(iv) $\forall a, b, n \in \mathbb{N}((a \cdot b) \cdot n = a \cdot (b \cdot n))$.

(v) $\forall a, b \in \mathbb{N}(a \cdot b = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \vee b = 0))$.

(vi) $\forall n, m, k \in \mathbb{N}\ ((k \neq 0 \wedge m \cdot k = n \cdot k) \Rightarrow n = m)$ (cancelación).

6. Usando la definición de la exponenciación y las propiedades demostradas para la suma y la multiplicación, demuestre las leyes de los exponentes en $\mathbb{N}$:

(i) $\forall a, n, m \in \mathbb{N}(a^n a^m = a^{n+m})$.

(ii) $\forall a, n, m \in \mathbb{N}((a^n)^m = a^{nm})$.

(iii) $\forall a, n, m \in \mathbb{N}((nm)^a = n^a m^a)$.

7. Dados $m, n \in \mathbb{N}$, demuestre lo siguiente:

(i) Si $m < n$, el $t \in \mathbb{N}^+$ tal que $m + t = n$ es único.

(ii) $m \leq n$ si y sólo si existe $t \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + t$. Además, en este caso, dicho t es único.

8. Demuestre las siguientes afirmaciones con respecto al orden en $\mathbb{N}$:

(i) $\forall n \in \mathbb{N}(0 \leq n)$.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}(n < s(n))$.

(iii) $\forall n \in \mathbb{N}(0 < s(n))$.

(iv) $\forall n, m \in \mathbb{N}(n < m \iff (s(n) = m \vee s(n) < m))$.

9. Sean m y n números naturales. Sabemos por el teorema 5.26 que $m < n$, $m = n$ o $m > n$. Es decir, se da al menos uno de estos tres casos. Demuestre que solamente una de estas tres relaciones se satisface. Es decir, demuestre que se da uno y sólo uno de estos tres casos.

10. Demuestre las siguientes afirmaciones con respecto al orden y las operaciones en $\mathbb{N}$:

(i) $\forall n, m \in \mathbb{N}(n \leq n + m)$

(ii) $\forall a, b, n \in \mathbb{N}(a < b \Leftrightarrow a + n < b + n)$

(iii) $\forall a, b, n \in \mathbb{N}((a < b \wedge n \neq 0) \Rightarrow a \cdot n < b \cdot n)$

(iv) $\forall n, m \in \mathbb{N}(m \neq 0 \Rightarrow n \leq n \cdot m)$

(v) $\forall n, m \in \mathbb{N}^+(m \neq 1 \Rightarrow n < n \cdot m)$

(vi) $\forall a, b, k \in \mathbb{N}((k \neq 0 \wedge a \cdot k = b \cdot k) \implies a = b)$, es decir, en $\mathbb{N}$ se cumple la ley de cancelación de la multiplicación.

11. Demuestre lo siguiente:

(i) El producto de dos naturales consecutivos es par. *Observación:* Por definición x es par si sólo si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x = 2k$ y x es impar si sólo si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x = 2k + 1$, además puede dar por hecho que todo natural es par o es impar y que si un natural no es par entonces es impar y viceversa. Usando todo esto, no se necesita inducción para demostrarlo.

(ii) El producto de 3 naturales consecutivos es múltiplo de 6. *Sugerencia:* Hágalo por inducción y utilice el ejercicio anterior.

12. Demuestre por inducción:

(i) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $0^2 + 1^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $0^3 + 1^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

(iii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$.

(iv) Para todo $n \in \mathbb{N}$ y $t, a \geqslant 0$, $a + at + at^2 + at^3 + \cdots + at^n = \frac{a(t^{n+1}-1)}{t-1}$.

(v) Para todo $n \in \mathbb{N}^+$, $1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + \cdots + n \cdot 3^n = \frac{(2n-1)3^{n+1}+3}{4}$.

13. Demuestre lo siguiente:

(i) Sean $a, b \in \mathbb{N}$ no ambos cero. Para toda $n \in \mathbb{N}^+$, $a^{2n} - b^{2n}$ es múltiplo de $(a+b)$, es decir, hay $x \in \mathbb{N}$ tal que $a^{2n} - b^{2n} = (a+b)x$.

(ii) Sean $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $a > b$. Para toda $n \in \mathbb{N}^+$, $a^n - b^n$ es múltiplo de $(a+b)$.

(iii) Sean $a, b \in \mathbb{N}$ no ambos cero. Para toda $n \in \mathbb{N}^+$, $a^{2n-1} - b^{2n-1}$ es múltiplo de $(a+b)$.

(iv) La suma de los n primeros términos de una progresión aritmética;

$a + 0d, a + 1d, a + 2d, \cdots, a + (n-1)d$ es igual a $\frac{n(2a+(n-1)d)}{2}$.

14. Demuestre lo siguiente:

(i) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $n < 2^n$.

(ii) Para toda $n \geq 4$, $2^n < n!$.

(iii) Para toda $n \in \mathbb{N}$, $\frac{2^{2n-1}}{n} \leq \binom{2n}{n} \leq 2^{2n-1}$.

(iv) Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}^+$, $na^{n-1}b \leq (n-1)a^n + b^n$.

(v) Pruebe que la suma de los ángulos internos de un polígono de n lados es $(n-2)180°$ usando inducción sobre n (de por hecho que la suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$).

15. Demuestre que para toda $n \in \mathbb{N}^+$, hay $m \in \mathbb{N}$ tal que $s(m) = n$, es decir, demuestre que la función sucesor $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ es sobre.

16. Diga cuál es el error en la siguiente “demostración” por inducción: Sea $n \geq 1$. Demuestre que dadas cualesquiera n líneas en $\mathbb{R}^2$, éstas son paralelas.

Paso base. Si $n = 1$, como toda línea es paralela a sí misma, la afirmación es cierta.

Paso inductivo. *Hipótesis de inducción:* Supongamos que la afirmación es cierta para n, es decir, que cualesquiera n líneas en $\mathbb{R}^2$ son paralelas.

Sean $L_1, L_2, ..., L_n, L_{n+1}$ líneas cualesquiera en $\mathbb{R}^2$. Denotando con $L \parallel M$ el hecho de que las líneas L y M sean paralelas, por la hipótesis de inducción, tenemos que $L_1 \parallel L_2 \parallel ... \parallel L_n$. También por la hipótesis de inducción, $L_2 \parallel L_3 \parallel ... \parallel L_n \parallel L_{n+1}$, entonces, como la relación ser paralela es transitiva $L_1, L_2, \ldots, L_n, L_{n+1}$ son paralelas.

Por lo tanto, cualesquiera $n+1$ líneas en $\mathbb{R}^2$ son paralelas.

¡Por lo tanto, para todo $n \geq 1$, cualesquiera n líneas en $\mathbb{R}^2$ son paralelas!

17. Diga cuál es el error en la siguiente ”demostración”por inducción:

En todo conjunto de $n \geq 1$ círculos en $\mathbb{R}^2$, todos los círculos tienen el mismo radio.

Paso base. Si $n = 1$, como todo círculo tiene el mismo radio que el radio de sí mismo, la afirmación es cierta.

Hipótesis de inducción. Supongamos que la afirmación es cierta para n, es decir, que cualesquiera n círculos en $\mathbb{R}^2$ tienen el mismo radio. Sean $C_1, C_2, \cdots, C_n, C_{n+1}$ círculos cualesquiera en $\mathbb{R}^2$. Por la hipótesis de inducción, tenemos que $C_1, C_2, \cdots, C_n$ tienen el mismo radio. También por la hipótesis de inducción, tenemos que $C_2, C_3, \cdots, C_n$ y C_{n+1} tienen el mismo radio, entonces, todos los círculos $C_1, C_2, \cdots, C_n, C_{n+1}$ tienen el mismo radio.

Por lo tanto, cualquiera $n+1$ círculos en $\mathbb{R}^2$ tienen el mismo radio ¡Por lo tanto, para todo $n \geq 1$, cualesquiera n círculos en $\mathbb{R}^2$ tienen el mismo radio!

18. Dé un ejemplo de un conjunto A de números que no satisfaga el Principio del Buen Orden, justificando su respuesta.

19. Recuerde que $n^< = \{m \in \mathbb{N} : m < n\}$ y es llamado el *segmento inferior de n*. Demuestre lo siguiente:

(i) $0^< = \varnothing$;

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}(n^< \cup \{n\} = s(n)^<)$;

(iii) $\forall n, m \in \mathbb{N}(n \leq m \Leftrightarrow n^< \subseteq m^<)$;

(iv) $\forall n, m \in \mathbb{N}(n < m \Leftrightarrow n^< \subsetneq m^<)$.

20. Revise con cuidado las demostraciones del Segundo Principio de Inducción y de la equivalencia entre el Segundo Principio de Inducción y el Principio del Buen Orden, analizando y repitiendo los argumentos que se utilizan en ellas.

21. Sea $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que no hay ningún número natural entre n y $s(n)$. Vea si puede encontrar dos demostraciones distintas, una usando el Primer Principio de Inducción y otra utilizando el Principio del Buen Orden.