Tarea IV de Álgebra Lineal II
Semestre 2020-II
30 de abril de 2020

Profra: Gabriela Campero Arena — Ayudte: Yanh Vissuet

I. Operadores unitarios y ortogonales y sus matrices

1. Establezca si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, dando prueba o contraejemplo:
   (i) Todo operador unitario es normal.
   (ii) Todo operador ortogonal es diagonalizable.
   (iii) Una matriz es unitaria si y sólo si es invertible.
   (iv) La suma de matrices unitarias es una matriz unitaria.
   (v) El adjunto de un operador unitario es unitario.
   (vi) Si el único eigenvalor de un operador lineal es el 1, entonces el operador es unitario u ortogonal.
   (vii) Un operador lineal puede preservar la norma y no el producto interno.
   (viii) Si U es un operador lineal en un espacio vectorial V dimensionalmente finito con producto interno, β es una base ortonormal para V y si $\forall x \in \beta(||U(x)|| = ||x||)$, entonces U es un operador unitario.
   (ix) Si A y B son matrices diagonalizables, entonces A es similar a B si y sólo si A y B son unitariamente equivalentes.
2. (a) Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3-3i \\ 3+3i & 5 \end{pmatrix}$. Encuentre una matriz ortogonal o unitaria P y una matriz diagonal D tales que $P^*AP = D$.
   (b) ¿Cuáles de los siguientes pares de matrices son unitariamente equivalentes?
   (i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
   (ii) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$
3. Sea V el espacio de las funciones continuas en $[0,1]$ con valores en los complejos con producto interior $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$. Sea $h \in V$ fija, y definamos $T : V \to V$ por $T(f) = hf$. Pruebe que T es un operador unitario si y sólo si $|h(t)| = 1$ para $0 \leq t \leq 1$.
4. Pruebe que si T es un operador unitario en un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno V, entonces T tiene una *raíz cuadrada* unitaria, es decir, existe un operador unitario U tal que $T = U^2$.
5. Sea A una matriz de $n \times n$ normal y simétrica, real o compleja y sean $\lambda_1, ..., \lambda_n$ los eigenvalores de A (no necesariamente distintos). Pruebe que:
   (a) $tr(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ y $tr(A^*A) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2$
   (b) $det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$
6. Pruebe que si A y B son matrices unitariamente equivalentes, entonces A es definida [o semidefinida] positiva, si y sólo si B es definida [o semidefinida] positiva.
7. Sea U un operador unitario sobre un espacio con producto interno V y sea W un subespacio de V de dimensión finita y U-invariante. Pruebe que:
   (a) $U(W) = W$
   (b) $W^\perp$ es U-invariante.
   (c) Encuentre un ejemplo de un operador unitario T sobre un espacio con producto interno, y un subespacio W que sea T-invariante pero tal que $W^\perp$ no es T-invariante. Compare con el inciso anterior.
8. Sea W un subespacio dimensionalmente finito de un espacio con producto interno V. Por el Teorema 6.7, sabemos que $V = W \oplus W^\perp$. Definamos $U : V \to V$ como $U(v_1 + v_2) = v_1 - v_2$ para cada $v_1 \in W$ y $v_2 \in W^\perp$. Pruebe que U es un operador autoadjunto unitario.
9. Sea V un espacio de dimensión finita con producto interno. Decimos que un operador lineal U es una **isometría parcial** si y sólo si existe un subespacio W de V tal que $\forall x \in W(||U(x)|| = ||x||)$ y $\forall x \in W^\perp(U(x) = 0)$. Nótese que W no necesariamente es U-invariante. Supongamos que U es una isometría parcial y que $\{v_1, ..., v_k\}$ es una base ortonormal para W. Pruebe los siguientes resultados:

(a) $\forall x, y \in W \ \ \langle U(x), U(y) \rangle = \langle x, y \rangle$. *Sugerencia:* Utilice las identidades polares demostradas en la Tarea II.

(b) $\{U(v_1), ..., U(v_k)\}$ es una base ortonormal para $R(U)$.

(c) Existe una base ortonormal γ para V tal que las primeras k columnas de $[U]_\gamma$ forman un conjunto ortonormal y el resto de las columnas son nulas.

(d) Sea $\{w_1, ..., w_j\}$ una base ortonormal para $R(U)^\perp$ y $\beta = \{U(v_1), ..., U(v_k), w_1, ..., w_j\}$. Entonces β es una base ortonormal para V.

(e) Sea T el operador lineal sobre V que satisface que $T(U(v_i)) = v_i$ $(1 \leq i \leq k)$ y $T(w_i) = 0$ $(1 \leq i \leq j)$. Entonces, T está bien definido y $T = U^*$. *Sugerencia:* Pruebe que $\forall x, y \in \beta$ $\langle U(x), y \rangle = \langle x, T(y) \rangle$. Hay cuatro casos.

(f) U^* es una isometría parcial.

10. Sean A y B matrices de $n \times n$ unitariamente equivalentes.

    (a) Pruebe que $tr(A^*A) = tr(B^*B)$.

    (b) Utilice el inciso anterior para probar que $\sum_{i,j=1}^n |A_{ij}|^2 = \sum_{i,j=1}^n |B_{ij}|^2$

    (c) Utilice el inciso anterior para demostrar que las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & i \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} i & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ no son unitariamente equivalentes.

11. Sea V un espacio real con producto interno.

    (a) Pruebe que toda traslación es una transformación rígida.

    (b) Pruebe que la composición de dos transformaciones rígidas sobre V es una transformación rígida sobre V.

12. Sean T y U operadores ortogonales en $\mathbb{R}^2$. Utilice el Teorema 6.23 para probar los siguientes resultados:

    (a) Si T y U son reflexiones por rectas que pasan por el origen, entonces UT es una rotación. ¿Cuál es el ángulo de rotación de UT si ϕ y θ son los ángulos que forman las rectas por las que reflejan T y U respectivamente?

    (b) Si T es una rotación y U es una reflexión por una recta que pasa por el origen, entonces UT y TU son reflexiones por rectas que pasan por el origen.

13. Encuentre coordenadas x' y y' tales que la forma cuadrática $x^2 - 12xy - 4y^2$ pueda ser escrita como $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2$.

14. Supongamos que β y γ son bases ordenadas para un espacio vectorial real [complejo] de dimensión n. Pruebe que si Q es una matriz de $n \times n$ ortogonal [unitaria] que cambia γ-coordenadas a β-coordenadas, entonces β es ortonormal si y sólo si γ es ortonormal.

II. Proyecciones ortogonales y el Teorema Espectral.

15. Sea V un espacio vectorial y sean W_1 y W_2 subespacios de V tales que $V = W_1 \oplus W_2$. Una función $T : V \to V$ se llama la *proyección sobre* W_1 *a lo largo de* W_2 si para $x = x_1 + x_2$ con $x_1 \in W_1$ y $x_2 \in W_2$, se tiene que $T(x) = x_1$.

    (i) Sea V un espacio vectorial y sean W_1 y W_2 subespacios de V tales que $V = W_1 \oplus W_2$. Sea $T : V \to V$ una proyección sobre W_1 a lo largo de W_2.

    (a) Demuestre que T es lineal.

    (b) Demuestre que $W_1 = \{x \in V : T(x) = x\}$.

    (c) Demuestre que $R(T) = W_1$ y $N(T) = W_2$.

    (d) Describa T si $W_1 = V$.

    (e) Describa T si $W_1 = \{\overline{0}\}$.

    (ii) Sea W un subespacio de un espacio vectorial V de dimensión finita.

    (a) Demuestre que existen un subespacio W' de V y una función $T : V \to V$ tales que T es una proyección sobre W a lo largo de W'.

    (b) Dé un ejemplo de un espacio vectorial V y un subespacio W de V tales que haya dos proyecciones sobre W a lo largo de dos subespacios (distintos).

    (iii) Sea $T : V \to V$ lineal y sea W un subespacio de V. Si T es una proyección sobre W a lo largo de algún subespacio W', demuestre que W es T-invariante y que $T_W = I_W$.

    (iv) Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sean W y W' subespacios de V. Sea T la proyección sobre W a lo largo de W'. Encuentre una base ordenada β de V de forma que $[T]_\beta$ sea una matriz diagonal, justificando su respuesta.

16. Establezca si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas dando prueba o contraejemplo:

    (i) Todas las proyecciones son autoadjuntas.

(ii) Una proyección ortogonal está determinada de manera única por su rango.
(iii) Todo operador autoadjunto es una combinación lineal de proyecciones ortogonales.
(iv) Si T es una proyección sobre W, entonces $T(x)$ es el vector en W más cercano a x.
(v) Toda proyección ortogonal es un operador unitario.

17. Sean $V = \mathbb{R}^2$, $W = \langle\{(1,2)\}\rangle$, y β la base ordenada estándar para V. Calcule $[T]_\beta$, donde T es la proyección ortogonal de V sobre W.
18. Considere la matriz del inciso 2(a) de esta tarea. Verifique que L_A posee una descomposición espectral y para cada eigenvalor de L_A, dé la definición explícita de la proyección ortogonal en el correspondiente eigenespacio. Verifique sus resultados usando el Teorema espectral.
19. Sea W un subespacio dimensionalmente finito de un espacio V con producto interno. Pruebe que si T es la proyección ortogonal de V sobre W, entonces $I - T$ es la proyección ortogonal de V sobre $W^\perp$.
20. Sea T un operador lineal definido sobre un espacio de dimensión finita con producto interno V.
    (a) Si T es una proyección ortogonal, entonces $\forall x \in V(||T(x)|| \leq ||x||)$. Encuentre un ejemplo de una proyección para la cual no se cumple esta desigualdad. ¿Qué se puede concluir de una proyección para la cual esta desigualdad es una igualdad para todo $x \in V$?.
    (b) Supongamos que T es una proyeción tal que $\forall x \in V(||T(x)|| \leq ||x||)$. Pruebe que T es una proyección ortogonal.
21. Sea T un operador normal sobre un espacio de dimensión finita con producto interno. Pruebe que si T es una proyección, entonces T es una proyección ortogonal.
22. Sea T un operador normal sobre un espacio complejo V de dimensión finita con producto interno. Use la descomposición espectral $\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 + ... + \lambda_k T_k$ de T, para probar los siguientes resultados:
    (a) Si g es un polinomio, entonces $g(T) = \sum_{i=1}^{k} g(\lambda_i) T_i$.
    (b) Si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n = T_0$, entonces $T = T_0$.
    (c) Sea U un operador lineal definido sobre V. Entonces, U conmuta con T si y sólo si U conmuta con cada T_i.
    (d) Existe un operador normal U sobre V tal que $U^2 = T$.
    (e) T es invertible si y sólo si para todo $1 \leq i \leq k \quad \lambda_i \neq 0$.
    (f) T es una proyección si y sólo si todo eigenvalor de T es 1 ó 0.
    (g) $T = -T^*$ si y sólo si todos los λ_i's son números imaginarios.
23. (a) Utilice el Corolario 1 del Teorema espectral para probar que si T es un operador normal sobre un espacio complejo de dimensión finita con producto interno V, y U es un operador que conmuta con T, entonces U conmuta con T^*.
    (b) *Diagonalización simultánea.* Sea V como en el inciso anterior y sean U y T operadores normales sobre V tales que $TU = UT$. Pruebe que existe una base ortonormal que consiste de eigenvectores tanto de T como de U. *Sugerencia:* Utilice el inciso anterior y el ejercicio 36(a) de la Tarea III.
24. Pruebe el inciso (c) del Teorema espectral.

III. Formas bilineales y cuadráticas

25. Establezca si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas dando prueba o contraejemplo:
    (i) Toda forma cuadrática es una forma bilineal.
    (ii) Si dos matrices son congruentes, tienen los mismos eigenvalores.
    (iii) Las formas bilineales simétricas tienen representaciones matriciales simétricas.
    (iv) Toda matriz simétrica es congruente con una matriz diagonal.
    (v) La suma de dos formas bilineales simétricas es una forma bilineal simétrica.
    (vi) Dos matrices simétricas con el mismo polinomio característico son representaciones matriciales de la misma forma bilineal.
    (vii) Existe una forma bilineal H tal que $\forall x, y(H(x,y) \neq 0)$.
    (viii) Si V es un espacio vectorial de dimensión n, entonces $\mathcal{B}(V)$ es un espacio vectorial de dimensión $2n$.
    (ix) Sea H una forma bilineal sobre un espacio de dimensión finta V tal que $dim(V) > 1$. Entonces, $\forall x \in V \; \exists y \in V$ tal que $y \neq 0$ pero $H(x,y) = 0$.
    (x) Si H es una forma bilineal definida sobre un espacio V de dimensión finita sobre los reales y con producto interno, entonces existe una base ordenada β para V tal que $\psi_\beta(H)$ es una matriz diagonal.

26. Determine cuáles de las siguientes funciones son formas bilineales. Justifique sus respuestas:
    (a) Sea $V = C[0,1]$ el espacio de las funciones reales y continuas sobre el intervalo $[0,1]$. Para $f, g \in V$, definimos $H(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.
    (b) Sea V un espacio vectorial sobre los complejos con producto interno. Definamos $H : V \times V \to C$ como $H(x,y) = \langle x, y \rangle$.
    (c) Sea $\beta = \{\cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t\}$. Entonces, β es una base ordenada para $V = \langle \beta \rangle$, un subespacio vectorial de dimensión cuatro del espacio de todas las funciones continuas sobre $\mathbb{R}$. Sea $H : V \times V \to \mathbb{R}$ la función definida por $H(f,g) = f'(0)g''(0)$. En caso de que H resulte una forma bilineal, calcule su representación matricial respecto a la base β.
27. Sean V y W espacios vectoriales sobre el mismo campo y sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Para toda $H \in \mathcal{B}(W)$, definimos $\overline{T}(H) : V \times V \to F$ por $\overline{T}(H)(x,y) = H(T(x), T(y))$. Pruebe los siguientes resultados:
    (a) Si $H \in \mathcal{B}(W)$, entonces $\overline{T}(H) \in \mathcal{B}(V)$.
    (b) $\overline{T} : \mathcal{B}(W) \to \mathcal{B}(V)$ es una transformación lineal.
    (c) Si T es un isomorfismo, entonces $\overline{T}$ también lo es.
28. Con la misma notación del Teorema 6.32, pruebe lo siguiente:
    (a) Para cualquier base ordenada β, ψ_β es lineal.
    (b) Sea β una base ordenada para un espacio V de dimensión n sobre un campo F, y sea $\phi_\beta : V \to F^n$ la representación estándar de V respecto a β. Para $A \in M_{n\times n}(F)$, definimos $H : V \times V \to F$ por $H(x,y) = [\phi_\beta(x)]^t A[\phi_\beta(y)]$. Pruebe que $H \in \mathcal{B}(V)$. ¿Puede establecer esto como un corolario al ejercicio 27?.
    (c) Pruebe el recíproco al inciso (b): Sea H una forma bilineal sobre V. Si $A = \psi_\beta(H)$, entonces $\forall x, y \in V \;\; H(x,y) = [\phi_\beta(x)]^t A[\phi_\beta(y)]$.
29. Pruebe el Corolario 2 del Teorema 6.32.
30. Sean V un espacio vectorial de dimensión finita y $H \in \mathcal{B}(V)$. Pruebe que para cualesquiera bases ordenadas β y γ de V, $rango(\psi_\beta(H)) = rango(\psi_\gamma(H))$.
31. Pruebe los siguientes resultados:
    (a) Toda matriz diagonal cuadrada es simétrica.
    (b) Una matriz congruente a una matriz diagonal, es simétrica.
    (c) El corolario al Teorema 6.35.
32. Sea V un espacio vectorial sobre un campo F de característica distinta de dos y sea H una forma bilineal simétrica sobre V. Pruebe que si $K(x) = H(x,x)$ es la forma cuadrática asociada a H, entonces, $\forall x, y \in V \;\; H(x,y) = \frac{1}{2}[K(x+y) - K(x) - K(y)]$.
33. Sea $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $K\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = -2t_1^2 + 4t_1t_2 + t_2^2$. Encuentre una forma bilineal simétrica H tal que $\forall x \in V \;\; K(x) = H(x,x)$. Además, encuentre una base ortonormal β para V tal que $\psi_\beta(H)$ es una matriz diagonal.
34. Pruebe la siguiente generalización del Teorema 6.37 (d):
    (a) Si $0 < rango(A) < n$ y A no tiene eigenvalores negativos, entonces f no tiene un máximo local en p:
    (b) Si $0 < rango(A) < n$ y A no tiene eigenvalores positivos, entonces f no tiene un mínimo local en p:
35. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Encuentre una matriz diagonal D y una matriz invertible Q tal que $Q^tAQ = D$. *Sugerencia:* Utilice alguna operación elemental que no sea la de intercambiar columnas.
36. Sea T un operador lineal sobre un espacio real con producto interno V y definamos $H : V \times V \to \mathbb{R}$ como $H(x,y) = \langle x, T(y) \rangle$.
    (a) Pruebe que H es una forma bilineal.
    (b) Pruebe que H es simétrica si y sólo si T es autoadjunto.
    (c) ¿Qué propiedades debe cumplir T para que H defina un producto interno sobre V?.
    (d) Explique por qué H podría no ser una forma bilineal si V es un espacio con producto interno sobre los complejos.
37. Pruebe el recíproco al inciso (a) del ejercicio anterior: Sea V un espacio dimensionalmente finito sobre los reales y con producto interno. Sea H una forma bilineal sobre V. Entonces existe un único operador lineal T sobre V tal que $\forall x, y \in V(H(x,y) = \langle x, T(y) \rangle)$. *Sugerencia:* Sea β una base ortonormal para V y sea $A = \psi_\beta(H)$. Sea T el operador lineal sobre V tal que $[T]_\beta = A$. Aplique el ejercicio 28 (c) y el ejercicio de la Identidad de Parseval de la tarea anterior.