Tarea IV de Teoría de Conjuntos I

Semestre 2018-II

11 de abril de 2018

Profra: Gabriela Campero Arena Ayudte: Manuel Zúñiga

1. Sea A un conjunto no vacío. Demuestre que la clase S de todos los conjuntos que sean equipotentes a A (que tengan la misma cardinalidad que A) *no* es un conjunto.
2. Sea A un conjunto y sea $B \subsetneq A$. Demuestre que si existe una función inyectiva $f : A \to B$, entonces hay un subconjunto de A que es equipotente a ω. *Sugerencia:* Tarea 3.
3. Demuestre las siguientes equipotencias y no equipotencias:
   (i) $\mathbb{R}^+ \sim \mathbb{R}^-$ (v) $(0,1) \sim \mathbb{R}$, (la función que propone ¿manda racionales en racionales y viceversa?)
   (ii) $\omega \sim \mathbb{Z}$ (vi) $(0,1) \times (0,1) \sim (0,1)$
   (iii) $\omega \sim \mathbb{Q}$ (vii) $2 \not\sim 3$
   (iv) $\omega \times \omega \sim \omega$ (viii) $\omega \not\sim \mathbb{R}$
4. Sean A, B, C y D conjuntos cualesquiera. Demuestre las siguientes afirmaciones:
   (i) Si $A \sim B$ y $C \sim D$, entonces ${}^{A}C \sim {}^{B}D$.
   (ii) Si $A \sim B$, entonces $\mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(B)$.
   (iii) $\mathcal{P}(A) \sim {}^{A}2$.
   (iv) $A \prec \mathcal{P}(A)$.
   (v) Si $A \prec B$ y $B \preccurlyeq C$, entonces $A \prec C$.
   (vi) Si $B \neq \varnothing$, entonces $A \preccurlyeq {}^{B}A$.
   (vii) Si $A \subseteq B$, entonces ${}^{A}C \preccurlyeq {}^{B}C$.
   (viii) Si $|A| \geq 2$, entonces $B \preccurlyeq {}^{B}A$. (Sugerencia: no olvide usar la hipótesis.)
5. Demuestre las siguientes afirmaciones al respecto de conjuntos finitos:
   (i) (Principio del Palomar) Dados $n, m \in \omega$, si $m < n$ y n objetos son colocados en m lugares, entonces algún lugar tendrá más de un objeto.
   (ii) Si $n, m \in \omega$ y $n \neq m$, entonces $n \not\sim m$.
   (iii) Si A es un conjunto y $|A| = n$ y $|A| = m$, entonces $n = m$.
   (iv) Si A es finito, $r \subseteq A^2$ y $\langle A, r\rangle$ es coto, entonces $\langle A, r\rangle$ es cobo.
6. Demuestre las siguientes equivalencias de las definiciones alternativas de finitud:
   (i) A es finito si y sólo si A es r-finito si y sólo si A es Tarski-finito.
   (ii) A es Dedekind-finito si y sólo si A es D'-finito.
   (iii) Si A es finito, entonces A es Dedekind-finito. (La demostración del recíproco requiere Axioma de Elección.)
   (iv) Si A es finito, entonces A es D'-finito. (La demostración del recíproco requiere Axioma de Elección.)
7. Sea A un conjunto y $r \subseteq A^2$. Demuestre que si r es antirreflexiva, transitiva y cumple que $\forall x \in A \exists y \in A(x \neq y \wedge \langle x, y\rangle \in r)$, entonces A es infinito.
8. Sea A un conjunto y $r \subseteq A^2$ tal que es reflexiva, transitiva y tricotómica.
   (i) Demuestre que si A es finito, entonces $\exists b \in A \forall a \in A \langle b, a\rangle \in r$.
   (ii) Dé un ejemplo de un conjunto A infinito en el que se cumpla que $\exists b \in A \forall a \in A \langle b, a\rangle \in r$ y otro ejemplo de un conjunto A infinito en el que no se cumpla.
9. Sea A un conjunto y $r \subseteq A^2$ tales que $\langle A, r\rangle$ es cobo. Demuestre que salvo que A sea finito, $\langle A, r^{-1}\rangle$ no es un cobo.
10. Demuestre que si A tiene un subconjunto numerable, entonces A es infinito.
11. Demuestre que todo conjunto numerable es equipotente con un subconjunto propio suyo.
12. Demuestre que la unión de un conjunto finito y uno contable es contable.
13. Demuestre que si $A \neq \varnothing$ es finito y B es numerable, entonces $A \times B$ es numerable.
14. Demuestre que si $A \neq \varnothing$ es finito, entonces el conjunto de todas las sucesiones finitas de elementos de A es numerable, es decir, $\bigcup_{n\in\omega} {}^{n}A \sim \omega$.
15. (i) Pruebe que el conjunto de todas las sucesiones finitas de números naturales es numerable.

(ii) Pruebe que la imagen de un conjunto numerable bajo una función es un conjunto contable.
(iii) Demuestre que el conjunto de todos los subconjuntos finitos de números naturales es numerable.

16. Usando el Teorema de Cantor, demuestre que el conjunto de todos los conjuntos no existe.
17. Usando el Teorema de Cantor-Schröder-Bernstein, demuestre que no existe un conjunto A tal que $\mathcal{P}(A) \in \mathcal{P}(A)$.
18. ¿Existe un conjunto A tal que $\mathcal{P}(A) \sim \omega$? Justifique su respuesta.
19. Recuerde que sin el Axioma de Elección no se puede demostrar que si A es infinito, entonces A es Dedekind-finito. Sin embargo, pruebe que si A es infinito, entonces $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ es Dedekind-infinito. (Sugerencia: Para cada $n \in \omega$ defina $S_n = \{X \subseteq A : |X| = n\}$ y vea que $\{S_n : n \in \omega\}$ es numerable.)
20. Demuestre que si $|A| \leq |B|$ y $A \neq \varnothing$, entonces existe una función de B sobre A. (Algo muy parecido viene en una tarea anterior.)
21. Demuestre que si existe una función de B sobre A, entonces $2^{|A|} \leq 2^{|B|}$. (Sugerencia: Si $g : B \to A$ es sobre, entonces para todo $X \subseteq A$ considere $f(X) = g^{-1}[X]$.)
22. Demuestre las siguientes afirmaciones para cualesquiera cardinales κ, λ, μ, κ_1, κ_2, λ_1, λ_2:
    (i) Si $\kappa \leq \lambda$, entonces $\kappa + \mu \leq \lambda + \mu$.
    (ii) Si $\kappa < \lambda$, entonces $\kappa + \mu \leq \lambda + \mu$.
    (iii) $\kappa \leq \kappa + \lambda$.
    (iv) Si $\kappa \geq 2$ y $\lambda \geq 2$, entonces $\kappa + \lambda \leq \kappa \cdot \lambda$.
    (v) Si $\kappa \leq \lambda$, entonces $\kappa \cdot \mu \leq \lambda \cdot \mu$.
    (vi) Si $\kappa < \lambda$, entonces $\kappa \cdot \mu \leq \lambda \cdot \mu$.
    (vii) $\kappa \leq \kappa \cdot \aleph_0$.
    (viii) $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$.
    (ix) Si κ y μ no son ambos cero y $\mu \leq \lambda$, entonces $\kappa^\mu \leq \kappa^\lambda$.
    (x) Si $\mu \leq \lambda$, entonces $\kappa^\mu \leq \kappa^\lambda$.
    (xi) $\kappa < 2^\kappa$.
    (xii) Si $\kappa_1 \leq \kappa_2$ y $\lambda_1 \leq \lambda_2$, entonces $\kappa_1^{\lambda_1} \leq \kappa_2^{\lambda_2}$.
    (xiii) $\lambda \cdot \aleph_0 \cdot 2 = \lambda \cdot \aleph_0$.
    (xiv) $\kappa^\kappa \leq 2^{\kappa \cdot \kappa}$.
23. Demuestre que para todo cardinal κ existe un cardinal λ tal que $\kappa < \lambda$ y $\lambda^2 = \lambda$.
24. Encuentre **contraejemplos** para las siguientes afirmaciones, donde κ, λ y μ son cardinales:
    (i) Si $\kappa < \lambda$, entonces $\kappa + \mu < \lambda + \mu$.
    (ii) Si $\lambda \neq 0$, entonces $\kappa < \kappa + \lambda$.
    (iii) $\kappa + \lambda \leq \kappa \cdot \lambda$.
    (iv) Si $\kappa \geq 1$ y $\lambda \geq 1$, entonces $\kappa + \lambda \leq \kappa \cdot \lambda$.
    (v) Si $\kappa \geq 2$ y $\lambda \geq 2$, entonces $\kappa + \lambda < \kappa \cdot \lambda$.
    (vi) Si $\kappa < \lambda$, entonces $\kappa \cdot \mu < \lambda \cdot \mu$.
    (vii) $\kappa < \kappa \cdot \aleph_0$.
    (viii) $0^\kappa = 0$.
    (ix) Si $\mu \leq \lambda$, entonces $\kappa^\mu \leq \kappa^\lambda$.
    (x) Si $\mu < \lambda$, entonces $\kappa^\mu < \kappa^\lambda$.
    (xi) Si $\mu < \lambda$, entonces $\mu^\kappa < \lambda^\kappa$.
    (xii) Si $\kappa > 2$, entonces $2^\kappa < \kappa^\kappa$.
25. Demuestre las siguientes igualdades:
    (i) $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ (v) $2^{\aleph_0} + 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$
    (ii) $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ (vi) $2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$
    (iii) $\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ (vii) $(2^{\aleph_0})^{2^{\aleph_0}} = 2^{2^{\aleph_0}}$
    (iv) $(2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ (viii) $(2^{2^{\aleph_0}})^{\aleph_0} = (2^{2^{\aleph_0}})^{2^{\aleph_0}}$
26. ¿Cuántos subconjuntos numerables de $\mathbb{R}$ hay? Justifique su respuesta.
27. ¿Cuántas funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ hay? Justifique su respuesta.
28. ¿Cuántas funciones inyectivas de ω en ω hay? Justifique su respuesta.

Racionales y reales

29. Demuestre que $\simeq$ es una relación de equivalencia sobre Q.

30. Demuestre lo siguiente.

(i) Todo racional se puede representar como la clase de equivalencia de un elemento $\langle a, b\rangle \in Q$ con $b >_{\mathbb{Z}} 0_{\mathbb{Z}}$.

(ii) Para cualesquiera enteros a y b, $a/b = -a/-b$.

(iii) El orden $<_{\mathbb{Q}}$ está bien definido: si a/b y c/d racionales cualesquiera y $\langle a', b'\rangle, \langle a'', b''\rangle \in a/b$ y $\langle c', d'\rangle, \langle c'', d''\rangle \in c/d$ con $b', b'', d', d'' >_{\mathbb{Z}} 0_{\mathbb{Z}}$, entonces $a'/b' <_{\mathbb{Z}} c'/d'$ si y sólo si $a''/b'' <_{\mathbb{Z}} c''/d''$.

31. Demuestre que las operaciones definidas sobre los racionales están bien definidas.

32. Demuestre que la estructura $\langle \mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}}, +_{\mathbb{Q}}, \cdot_{\mathbb{Q}}, 0_{\mathbb{Q}}, 1_{\mathbb{Q}}\rangle$ es lo que en álgebra se denomina un campo ordenado, es decir, cumple todo lo que cumple $\langle \mathbb{Z}, <_{\mathbb{Z}}, +_{\mathbb{Z}}, \cdot_{\mathbb{Z}}, 0_{\mathbb{Z}}, 1_{\mathbb{Z}}\rangle$ como dominio entero y algo más:

(i) la suma y la multiplicación en los racionales son conmutativas y asociativas, y la multiplicación se distribuye sobre la suma;

(ii) existen un neutro aditivo $0_{\mathbb{Q}}$ y un neutro multiplicativo $1_{\mathbb{Q}}$, además $0_{\mathbb{Q}} \neq 1_{\mathbb{Q}}$;

(iii) todo racional tiene un inverso aditivo;

(iv) todo racional no igual a $0_{\mathbb{Q}}$ tiene inverso multiplicativo, es decir, si $a/b \neq 0_{\mathbb{Q}}$, entonces existe c/d tal que $a/b \cdot_{\mathbb{Q}} c/d = 1_{\mathbb{Q}}$;

(v) $\langle \mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}}\rangle$ es un orden total;

(vi) para cualesquiera racionales a/b, c/d y e/f

- si $a/b <_{\mathbb{Q}} c/d$, entonces $(a/b +_{\mathbb{Q}} e/f) <_{\mathbb{Q}} (c/d +_{\mathbb{Q}} e/f)$;
- si e/f es un racional positivo y $a/b <_{\mathbb{Q}} c/d$, entonces $(a/b \cdot_{\mathbb{Q}} e/f) <_{\mathbb{Q}} (c/d \cdot_{\mathbb{Q}} e/f)$.

33. Demuestre que si $a/b, c/d \in \mathbb{Q}$ con $c/d \neq 0_{\mathbb{Q}}$, la ecuación $a/b = c/d \cdot_{\mathbb{Q}} x$ tiene una solución $x \in \mathbb{Q}$ y ésta es única.

34. Demuestre que $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, donde $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(p) = p/1_{\mathbb{Z}}$ es un morfismo inyectivo de $\langle \mathbb{Z}, <_{\mathbb{Z}}, +_{\mathbb{Z}}, \cdot_{\mathbb{Z}}, 0_{\mathbb{Z}}, 1_{\mathbb{Z}}\rangle$ en $\langle \mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}}, +_{\mathbb{Q}}, \cdot_{\mathbb{Q}}, 0_{\mathbb{Q}}, 1_{\mathbb{Q}}\rangle$:

(i) $\forall p, q \in \mathbb{Z}(p <_{\mathbb{Z}} qp/1 <_{\mathbb{Q}} q/1)$;

(ii) $\forall p \in \mathbb{Z}\ \forall q \in \mathbb{Z}\ (\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(p) +_{\mathbb{Q}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(q) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(p +_{\mathbb{Z}} q))$;

(iii) $\forall p \in \mathbb{Z}\ \forall q \in \mathbb{Z}\ (\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(p) \cdot_{\mathbb{Q}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(q) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(p \cdot_{\mathbb{Z}} q))$;

(iv) $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(0_{\mathbb{Z}}) = 0_{\mathbb{Q}}$; y

(v) $\mathbb{E}_{\mathbb{Z}}(1_{\mathbb{Z}}) = 1_{\mathbb{Q}}$.

35. Demuestre que $(\mathbb{R}, <_{\mathbb{R}})$ es un orden lineal.

36. Demuestre que $+_{\mathbb{R}}$ es asociativa y conmutativa.

37. Demuestre que para todo $r \in \mathbb{Q}$, $I_r = \{q \in \mathbb{Q} : q <_{\mathbb{Q}} r\}$ es un segmento inicial de $\mathbb{Q}$.

38. Dé un ejemplo de un segmento inicial I de $\mathbb{Q}$ tal que $I \neq I_r$, para toda $r \in \mathbb{Q}$, justificando su respuesta.

39. Demuestre que si $(F, \oplus, \odot, <_F)$ es un campo ordenado y 0_F es su neutro aditivo, entonces

$$\forall x, y, z \in F\left((x <_F y \wedge z <_F 0) x \odot z >_F y \odot z\right).$$

40. Demuestre que $(\mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}}, +_{\mathbb{Q}}, \cdot_{\mathbb{Q}})$ es un campo ordenado.

41. Enuncie la propiedad del supremo que se cumple en $(\mathbb{R}, <_{\mathbb{R}})$ y diga por qué no se cumple en $(\mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}})$.

42. ¿Qué se debe agregar a la definición de campo ordenado para poder afirmar que $(\mathbb{R}, <_{\mathbb{R}}, +_{\mathbb{R}}, \cdot_{\mathbb{R}})$ es el único, salvo isomorfismo, campo ordenado con esa propiedad?

43. Definimos $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ como $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(r) = I_r$. Demuestre lo siguiente:

a) $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}$ es inyectiva;

b) $\forall r, r' \in Q(r <_{\mathbb{Q}} r' \implies \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(r) <_{\mathbb{R}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(r'))$;

c) $\forall r, r' \in \mathbb{Q}(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(r +_{\mathbb{Q}} r') = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(r) +_{\mathbb{R}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(r'))$;

d) $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(0_{\mathbb{Q}}) = 0_{\mathbb{R}}$, donde $0_{\mathbb{R}}$ es el neutro aditivo de $\mathbb{R}$.

De hecho, además se cumple que:

e) $\forall r, r' \in \mathbb{Q}(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(r \cdot_{\mathbb{Q}} r') = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(r) \cdot_{\mathbb{R}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(r'))$;

f) $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(1_{\mathbb{Q}}) = 1_{\mathbb{R}}$, donde $1_{\mathbb{R}}$ es el unitario de $\mathbb{R}$.