Tarea III de Lógica Matemática I
Semestre 2016-1
17 de septiembre de 2015

Profra: Gabriela Campero Arena — Ayud: Héctor Olvera Vital

1. Demuestre que un conjunto de fórmulas Γ es satisfacible si y sólo si existe una fórmula α tal que $\Gamma \not\models \alpha$.
2. Demuestre que una fórmula α es insatisfacible si y sólo si $\neg\alpha$ es tautología.
3. Sean Γ un conjunto de fórmulas y α una fórmula. Demuestre o dé un contraejemplo:
   (i) Si $\Gamma \models \neg\alpha$, entonces $\Gamma \not\models \alpha$.
   (ii) Si $\Gamma \not\models \alpha$, entonces $\Gamma \models \neg\alpha$.
   (iii) $\Gamma \models \alpha$ si y sólo si $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ *no* es satisfacible.
   (iv) Si $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n\}$, entonces $\Gamma \models \alpha$ si y sólo si $\gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge ... \wedge \gamma_n \wedge \neg\alpha$ *no* es satisfacible.
4. (i) Si ψ es una fórmula en la que no aparece el símbolo de enunciado A y v y v' son dos asignaciones de verdad que difieren a lo más en el valor de verdad que le asignan a A, entonces $\overline{v}(\psi) = \overline{v'}(\psi)$.
   (ii) Si ψ es una fórmula en la que no aparecen las letras proposicionales A_1, A_2, ..., A_n y v y v' son dos asignaciones de verdad que difieren a lo más en el valor de verdad que le asignan a A_1, A_2, ..., A_n, entonces $\overline{v}(\psi) = \overline{v'}(\psi)$.
5. Supóngase que agregamos los conectivos 0-arios a nuestro lenguaje. Para cada fórmula φ y cada símbolo de enunciado A, definimos $\varphi^A_\top$ como la fórmula que se obtiene de φ reemplazando A por $\top$. De manera análoga definimos a $\varphi^A_\bot$. Sea $\varphi^A_* \leftrightharpoons (\varphi^A_\top \vee \varphi^A_\bot)$. Pruebe lo siguiente:
   (i) $\varphi \models \varphi^A_*$;
   (ii) si $\varphi \models \psi$ y A no aparece en ψ, entonces $\varphi^A_* \models \psi$;
   (iii) la fórmula φ es satisfacible si y sólo si φ^A_* es satisfacible.

   Observaciones: Podemos pensar que φ^A_* trata de decir todo lo que dice φ, pero sin usar el símbolo A. Los incisos (a) y (b) expresan que φ^A_* es la consecuencia, libre de A, más fuerte de φ. Las fórmulas φ y φ^A_* no son en general tautológicamente equivalentes, pero son "igualmente satisfacibles" por el inciso (c).
6. (Teorema de interpolación) Si $\alpha \models \beta$, entonces se cumple alguna de las siguientes tres posibilidades:
   (i) α es contradictoria;
   (ii) β es tautlogía;
   (iii) existe una fórmula γ cuyos símbolos de enunciado aparecen todos tanto en α como en β y tal que $\alpha \models \gamma \models \beta$. *Sugerencia:* Utilice el ejercicio anterior.
7. Supongamos que Σ es finitamente satisfacible (todo subconjunto finito de Σ es satisfacible). Sea α una fórmula cualquiera. Demuestre que al menos uno de los conjuntos $\Sigma \cup \{\alpha\}$ o $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ es finitamente satisfacible. *Esto forma parte de la demostración del Teorema de Compacidad.* *Sugerencia:* Suponga que ni $\Sigma \cup \{\alpha\}$ ni $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ son finitamente satisfacibles y llegue a una contradicción.
8. Sea Δ un conjunto de fórmulas tal que (i) es finitamente satisfacible, y (ii) para toda fórmula α, o bien $\alpha \in \Delta$ o bien $\neg\alpha \in \Delta$. Definimos la asignación de verdad v de la siguiente manera, para cualquier símbolo de enunciado A:
$$v(A) = \begin{cases} V & \text{si } A \in \Delta \\ F & \text{si } A \notin \Delta \end{cases}$$
   Demuestre que para toda fórmula φ, $\overline{v}(\varphi) = V$ si y sólo si $\varphi \in \Delta$. *Esto forma parte de la demostración del Teorema de Compacidad.*
9. Pruebe que a partir del corolario del Teorema de Compacidad se puede demostrar el Teorema (es decir, que son equivalentes).
10. En 1977 se probó que todo mapa plano puede colorearse con cuatro colores de tal forma que ningún par de países fronterizos tengan el mismo color. Supongamos que tenemos un mapa plano infinito (pero numerable) con los países $C_1, C_2, C_3, ...$. Demuestre que este mapa también puede colorearse con sólo cuatro colores. *Sugerencia:* Divida los símbolos de enunciado en cuatro partes. Por ejemplo, un símbolo de enunciado puede usarse para traducir "El país C_7 se colorea de rojo". Forme un conjunto Σ_1 de fórmulas que digan, por ejemplo, C_7 se colorea exactamente con un color. Forme otro conjunto Σ_2 de fórmulas que digan, que para cada par de países fronterizos no son del mismo color. Aplique el Teorema de Compacidad a $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$.
11. Demuestre que un conjunto de expresiones es decidible si y sólo si tanto él como su complemento (con respecto al conjunto de todas las expresiones) son efectivamente numerables.
12. Explique por qué la unión de dos conjuntos efectivamente numerables también es efectivamente numerable.
13. Explique por qué la intersección de dos conjuntos efectivamente numerables también es efectivamente numerable.
14. Sea Σ un conjunto efectivamente numerable de fórmulas. Suponga que para cada fórmula τ, $\Sigma \models \tau$ o $\Sigma \models \neg\tau$. Pruebe que el conjunto de las consecuencias tautológicas de Σ es decidible en cualquier de los siguientes casos:
    (i) considerando que "o" se interpreta en el sentido exclusivo: o bien $\Sigma \models \tau$, o bien $\Sigma \models \neg\tau$, pero no ambos;
    (ii) considerando que "o" se interpreta en el sentido inclusivo: o $\Sigma \models \tau$, o $\Sigma \models \neg\tau$, o ambos.
15. (i) Explique por qué la unión de dos conjuntos efectivamente numerables también es efectivamente numerable.
    (ii) Explique por qué la intersección de dos conjuntos efectivamente numerables también es efectivamente numerable.
16. Para cada una de las siguientes condiciones, dé un ejemplo de un conjunto de fórmulas *no satisfacible* que cumpla la condición.
    (i) Cada elemento de Γ es, en sí mismo, satisfacible.
    (ii) Para cualesquiera *dos* elementos γ_1 y γ_2 de Γ, el conjunto $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ es satisfacible.
    (iii) Para cualesquiera *tres* elementos γ_1, γ_2 y γ_3 de Γ, el conjunto $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ es satisfacible.