Tarea III de Álgebra Lineal II
Semestre 2020-II
26 de marzo de 2020

Profra: Gabriela Campero Arena Ayudtes: Yanh Vissuet

I. Proceso de Ortogonalización de Gram-Schmidt

1. Establezca si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, dando prueba o contraejemplo:
   (i) El proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt nos permite construir un conjunto ortonormal a partir de un conjunto arbitrario de vectores.
   (ii) Todo espacio de dimensión finita distinto del trivial y con producto interno tiene una base ortonormal.
   (iii) El complemento ortogonal de cualquier conjunto es un subespacio vectorial.
   (iv) Si $\{v_1, ..., v_n\}$ es una base para un espacio con producto interno V, entonces dada $x \in V$ los escalares $\langle x, v_i\rangle$ son los coeficientes de Fourier de x.
   (v) Una base ortonormal siempre es una base ordenada.
   (vi) Todo conjunto ortogonal es linealmente independiente.
   (vii) Todo conjunto ortonormal es linealmente independiente.
2. En los siguientes incisos, aplique el proceso Gram-Schmidt al subconjunto dado S del espacio con producto interno V para obtener una base ortogonal para $\langle S\rangle$. Después, normalice los vectores en esta base para obtener una base ortonormal β para $\langle S\rangle$ y calcule los coeficientes de Fourier para el vector dado con respecto a β:
   (i) $V = \mathbb{R}^3$; $S = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 3, 3)\}$; $x = (1, 2, 2)$;
   (ii) $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$; $S = \left\{\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -12 \\ 3 & -16 \end{pmatrix}\right\}$; $A = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 25 & -13 \end{pmatrix}$;
   (iii) $V = \langle S\rangle$, con el producto interno $\langle f, g\rangle = \int_0^\pi f(t)g(t)dt$, $S = \{\sin t, \cos t, 1, t\}$ y $h(t) = 2t + 1$;
   (iv) $V = \mathbb{C}^4$, $S = \{(1, i, 2 - i, -1), (2 + 3i, 3i, 1 - i, 2i), (-1 + 7i, 6 + 10i, 11 - 4i, 3 + 4i)\}$, $x = (-2 + 7i, 6 + 9i, 9 - 3i, 4 + 4i)$.
3. Sea V un espacio con producto interno y sea W un subespacio de dimensión finita de V. Demuestre que si $x \notin W$, entonces existe $y \in V$ tal que $y \in W^\perp$, pero $\langle x, y\rangle \neq 0$.
4. Sea β una base para un subespacio W de un espacio con producto interno V y sea $z \in V$. Demuestre que $z \in W^\perp$ si y sólo si $\forall v \in \beta$ $\langle z, v\rangle = 0$.
5. Sea V un espacio vectorial (no necesariamente de dimensión finita) con producto interior sobre F y sea W un subespacio de V. Si $x \in V$, pruebe que para un elemento $a \in W$, $\| x - a \| = \inf \{\| x - w \| : w \in W\}$ (a es el mejor aproximador de x en W) si y sólo si $x - a \in W^\perp$.
6. Sea W un subespacio de dimensión finita de un espacio con producto interno V. Pruebe que existe una proyección T sobre W a lo largo de $W^\perp$ tal que $N(T) = W^\perp$ y además $\forall x \in V$ $||T(x)|| \leq ||x||$.
   Sugerencia: Utilice el ejercicio 26(a) de la tarea anterior.
7. Sean V un espacio con producto interno, S y S_0 subconjuntos de V y W un subespacio de dimensión finita de V. Pruebe que:
   (i) $S_0 \subseteq S \Rightarrow S^\perp \subseteq S_0^\perp$;
   (ii) $S \subseteq (S^\perp)^\perp$, y por tanto $\langle S\rangle \subseteq (S^\perp)^\perp$;
   (iii) $W = (W^\perp)^\perp$;
   (iv) $V = W \oplus W^\perp$.
8. Sea V un espacio de dimensión finita sobre F con producto interno.
   (a) *Identidad de Parseval.* Sea $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ una base ortonormal para V. Pruebe que para cualesquiera $x, y \in V$, $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n \langle x, v_i\rangle \overline{\langle y, v_i\rangle}$.
   (b) Use el inciso (a) para probar que si β es una base ortonormal para V con producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$, entonces para cualesquiera $x, y \in V$, se tiene que $\langle \phi_\beta(x), \phi_\beta(y)\rangle' = \langle [x]_\beta, [y]_\beta\rangle' = \langle x, y\rangle$, donde $\langle\cdot,\cdot\rangle'$ es el producto interior canónico para F^n.
9. (a) *Desigualdad de Bessel.* Sea V un espacio con producto interno y sea $S = \{v_1, ..., v_n\}$ un subconjunto ortonormal de V. Pruebe que para cualquier $x \in V$:
   $$||x||^2 \geq \sum_{i=1}^n |\langle x, v_i\rangle|^2.$$
   Sugerencia: Utiliza el ejercicio 26(a) de la tarea anterior.
   (b) Pruebe que en la desigualdad de Bessel se da la igualdad si y sólo si $x \in \langle S\rangle$.
10. Sea T un operador lineal definido sobre un espacio con producto interior V. Pruebe que si $\forall x, y \in V$ $\langle T(x), y\rangle = 0$, entonces $T = T_0$. De hecho, pruebe que este resultado es válido si la igualdad anterior se da para cualesquiera x y y en alguna base de V.
11. Sea $V = C([-1, 1])$. Supongamos que W_p y W_i son los subespacios de V que consisten en todas las funciones pares e impares respectivamente. (Recuerda que $V = W_p \oplus W_i$.) Pruebe que $W_p^\perp = W_i$ con el producto interno definido en V como:

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

12. (a) Encuentre la proyección ortogonal del vector $h(x) = 4 + 3x - 2x^2$ en el subespacio $P_1(\mathbb{R})$ de $V = P(\mathbb{R})$ con el producto interno $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.
    (b) Encuentre la distancia del vector $h(x)$ anterior al subespacio $P_1(\mathbb{R})$.
13. Sea V el espacio de todas las sucesiones en $F = \mathbb{R}$ ó $F = \mathbb{C}$ tales que $\sigma(n) \neq 0$ para a lo más un número finito de $n \in \mathbb{N}$. Para $\sigma, \mu \in V$, definimos $\langle \sigma, \mu\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma(n)\overline{\mu(n)}$. Como sólo un número finito de sumandos son distintos de cero, esta serie siempre converge.
    (a) Demuestre que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es un producto interno para V y, por tanto, V es un espacio con producto interno.
    (b) Para cada $n \in \mathbb{N}^+$, sea e_n la sucesión definida por $e_n(k) = \delta_{n,k}$. Pruebe que $\{e_1, e_2, ...\}$ es una base ortonormal para V.
    (c) Sean $\sigma_n = e_1 + e_n$ y $W = \langle\{\sigma_n \ : n \geq 2\}\rangle$.
        (i) Pruebe que $e_1 \notin W$, por lo que $W \neq V$.
        (ii) Pruebe que $W^\perp = \{\overline{0}\}$ y concluye que $W \neq (W^\perp)^\perp$. Este resultado nos dice que la hipótesis de que W sea de dimensión finita es indispensable para el ejercicio 6 (iii).
14. Sea V un espacio vectorial con producto interno (de cualquier dimensión). Demuestre lo siguiente.
    (a) Para cualquier subespacio W de V se tiene que $V = W \oplus W^\perp$ si y sólo si para cualquier subespacio Z de V se tiene que $\left(Z^\perp\right)^\perp = Z$.
    (b) Si un subespacio W de V cumple que $\forall x \in V\ \exists y \in W$ tal que $\|y - x\| = \text{ínf}\{\|w - x\| \mid w \in W\}$, entonces $\forall x \in V \setminus W\ \exists z \in W^\perp$ tal que $\langle x, z\rangle \neq 0$.

II. El adjunto de un operador lineal.

15. Establezca si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, dando prueba o contraejemplo.
    (i) Todo operador lineal tiene un adjunto.
    (ii) Todo operador lineal sobre V tiene la forma $x \to \langle x, y\rangle$ para alguna $y \in V$ fija.
    (iii) Para todo operador lineal T sobre V y para toda base ordenada β para V, se tiene que $[T^*]_\beta = ([T]_\beta)^*$.
    (iv) El adjunto de un operador lineal es único.
    (v) Para cualquier matriz A de $n \times n$, se tiene que $(L_A)^* = L_{A^*}$.
    (vi) Si T es un operador lineal, entonces $N(T) = N(T^*)$ *Sugerencia:* Si la prueba no sale rápido, intenta buscar contraejemplos.
    (vii) Si V es un espacio de dimensión finita con producto interior y T es un operador lineal invertible sobre V, entonces T^* es invertible y $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.
16. Para los siguientes espacios con producto interno V y transformaciones lineales $g : V \to F$, encuentre un vector $y \in V$ tal que $\forall x \in V\ g(x) = \langle x, y\rangle$.
    (a) $V = \mathbb{C}^2$, $g(z_1, z_2) = z_1 - 2z_2$;
    (b) $V = P_2(\mathbb{R})$, con el producto interno $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$; $g(f) = f(0) + f'(1)$.
17. (a) Si $V = P_1(\mathbb{R})$ con $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$ y $T(f) = f' + 3f$, calcule $T^*(f(t))$ para $f(t) = 4 - 2t$.
    (b) Sea V un espacio con producto interno y sean $y, z \in V$. Definamos $T : V \to V$ como:
    $$\forall x \in V\ T(x) = \langle x, y\rangle\, z.$$
    Pruebe que T es lineal, que T^* existe y dé la definición explícita de T^*.
18. Termine las demostraciones del Teorema 6.11 y su Corolario.
19. Pruebe que si $V = W \oplus W^\perp$ y T es la proyección sobre W a lo largo de $W^\perp$, entonces $T = T^*$. *Sugerencia:* Recuerde que $N(T) = W^\perp$.
20. Sea T un operador lineal definido sobre un espacio con producto interno V. Pruebe que $\forall\, x \in V\ ||T(x)|| = ||x||$ si y sólo si $\forall\, x, y \in V\ \langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$. *Sugerencia:* Utilice las identidades polares probadas en la tarea anterior.
21. Sea T un operador lineal definido sobre un espacio con producto interno V. Pruebe que si $T^*T = T_0$, entonces $T = T_0$. ¿Es válido el mismo resultado si suponemos que $TT^* = T_0$?.
22. Sea V un espacio con producto interno y sea T un operador lineal sobre V. Pruebe que:
    (a) $R(T^*)^\perp = N(T)$.
    Para los siguientes incisos, supongamos que V es de dimensión finita:
    (b) $R(T^*) = N(T)^\perp$.
    (c) $N(T^*T) = N(T)$. Deduzca que $rango(T^*T) = rango(T)$.
    (d) $rango(T) = rango(T^*)$. Deduzca, con ayuda del inciso anterior, que $rango(TT^*) = rango(T)$ y que si A es una matriz de $n \times n$, entonces $rango(A^*A) = rango(AA^*) = rango(A)$.

23. Sea A una matriz de $n \times n$. Pruebe que $det(A^*) = \overline{det(A)}$.
24. En física, la *Ley de Hooke* establece que existe una relación lineal entre la longitud x de un resorte y la fuerza y aplicada al mismo. Esto significa que $y = cx + d$ para alguna constante c que es llamada *constante del resorte*. Utilice los siguientes datos experimentales para estimar dicha constante.

$Longitud(cm)$ x	$Fuerza(dinas)$ y
3,5	1,0
4,0	2,2
4,5	2,8
5,0	4,3

25. Encuentre una solución minimal al siguiente sistema de ecuaciones lineales: $\begin{aligned} x + 2y - z &= 1 \\ 2x + 3y + z &= 2 \\ 4x + 7y - z &= 4 \end{aligned}$
26. Sean V y $\{e_1, e_2, ...\}$ como en el ejercicio 12. Definamos $T : V \to V$ como:
$$T(\sigma)(k) = \sum_{i=k}^{\infty} \sigma(i) \ \ \forall k \in \mathbb{N}^+.$$
Observe que la serie que define a T siempre converge pues sólo un número finito de sumandos son distintos de cero.
    (a) Pruebe que T es un operador lineal sobre V.
    (b) Pruebe que $\forall n \in \mathbb{N}^+$, $T(e_n) = \sum_{i=1}^{n} e_i$.
    (c) Pruebe que T no tiene un operador adjunto. *Sugerencia:* Por reducción al absurdo, supongamos que existe T^*. Pruebe que $\forall n \in \mathbb{N}^+$, $T^*(e_n)(k) \neq 0$ para una cantidad infinita de k's.

III. Operadores normales y autoadjuntos.

27. Establezca si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, dando prueba o contraejemplo.
    (i) Todo operador autoadjunto es normal.
    (ii) Los operadores lineales y sus adjuntos tienen los mismos eigenvectores.
    (iii) Si T es un operador sobre un espacio con producto interno de dimensión finita V, entonces T es normal si y sólo si $[T]_\beta$ es normal, donde β es cualquier base ordenada para V.
    (iv) Una matriz real o compleja A es normal si y sólo si L_A es normal.
    (v) Los eigenvalores de un operador lineal autoadjunto son todos números reales.
    (vi) Todo operador normal sobre un espacio de dimensión finita es diagonalizable.
    (vii) Todo operador autoadjunto sobre un espacio de dimensión finita es diagonalizable.
28. Para cada uno de los siguientes operadores lineales T definidos sobre el espacio con producto interno V, determine si T es normal, autoadjunto, o ninguna de las dos. Si es posible, encuentre una base ortonormal de eigenvectores de T para V y diga cuáles son los correspondientes eigenvalores.
    (a) $V = \mathbb{R}^2$, $T(a, b) = (2a - 2b, -2a + 5b)$;
    (b) $V = \mathbb{C}^2$, $T(a, b) = (2a + ib, a + 2b)$;
    (c) $V = P_2(\mathbb{R})$, con $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ y $T(f) = f'$;
    (d) $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $T(A) = A^t$.
29. Sea V un espacio con producto interno sobre $\mathbb{C}$. Sea T un operador lineal definido sobre V. Definimos:
$$T_1 = \frac{1}{2}(T + T^*) \text{ y } T_2 = \frac{1}{2i}(T - T^*).$$
    (a) Pruebe que T_1 y T_2 son autoadjuntos y que $T = T_1 + iT_2$.
    (b) Pruebe que si $T = U_1 + iU_2$, donde U_1 y U_2 son autoadjuntos, entonces $T_1 = U_1$ y $T_2 = U_2$.
    (c) Pruebe que T es normal si y sólo si $T_1T_2 = T_2T_1$.
30. Sea T un operador lineal definido sobre un espacio con producto interno V y sea W un subespacio T-invariante de V. Pruebe que:
    (a) Si T es autoadjunto, entonces T_W es autoadjunto.
    (b) $W^\perp$ es T^*-invariante.
    (c) Si W es T-invariante y T^*-invariante, entonces $(T_W)^* = (T^*)_W$.
    (d) Si W es T-invariante y T^*-invariante, y T es normal, entonces T_W es normal.
31. Sea T un operador lineal normal definido sobre un espacio complejo de dimensión finita con producto interno V y sea W un subespacio de V. Pruebe que si W es T-invariante, entonces W también es T^*-invariante. *Sugerencia:* Utilice el ejercicio 15 de la tarea anterior.
32. Sea T un operador normal definido sobre un espacio de dimensión finita con producto interno. Pruebe que $N(T) = N(T^*)$ y $R(T) = R(T^*)$. *Sugerencia:* Utilice el Teorema 6.15 del Friedberg y el ejercicio 21.
33. Supóngase que T es un operador lineal definido sobre un espacio vectorial complejo con producto interno (no necesariamente de dimensión finita), y supongamos que T^* es el adjunto de T. Pruebe los siguientes resultados:

(a) Si T es autoajunto, entonces $\forall x \in V$ ($\langle T(x), x\rangle$) es un número real.
(b) Si T cumple que $\forall x \in V$ ($\langle T(x), x\rangle = 0$), entonces $T = T_0$. *Sugerencia:* Reemplace x por $x + y$ y luego por $x + iy$ y desarolle las expresiones correspondientes.
(c) Si $\forall x \in V$ ($\langle T(x), x\rangle \in \mathbb{R}$), entonces $T = T^*$.

34. Sea T un operador normal definido sobre un espacio real de dimensión finita con producto interno V, cuyo polinomio característico se descompone. Demuestre que V tiene una base ortonormal de eigenvectores de T. Además, pruebe que T es autoadjunto.

35. Sean T y U operadores lineales sobre un espacio vectorial V. Demuestre lo siguiente.
   (i) Si $TU = UT$, entonces $N(T)$ y $R(T)$ son U-invariantes.
   (ii) Si V es de dimensión finita y U y T son diagonalizables, entonces $UT = TU$ si y sólo si U y T son *simultáneamente diagonalizables*, es decir, existe una base β de V tal que tanto $[T]_\beta$ como $[U]_\beta$ son diagonales. *Sugerencia:* demuestre el regreso por inducción fuerte sobre la dimensión de V.

36. (a) *Diagonalización simultánea.* Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita y con producto interno. Sean U y T operadores autoadjuntos definidos sobre V tales que $TU = UT$. Pruebe que existe una base ortonormal de V que consiste de eigenvectores tanto de U como de T. (La versión compleja de este ejercicio estará en la próxima tarea). *Sugerencia:* Para todo eigenespacio $W = E_\lambda$ de T, tenemos que W es T- y U-invariante, así que por el ejercicio 30, tenemos que $W^\perp$ es T- y U-invariante. Aplique los Teoremas 6.17 y 6.6.
   (b) Sean A y B matrices reales y simétricas de $n \times n$ tales que $AB = BA$. Utiliza el inciso anterior para probar que existe una matriz ortogonal P tal que P^tAP y P^tBP son matrices diagonales.

Definición: Un operador lineal T definido sobre un espacio vectorial dimensionalmente finito con producto interno es llamado **definido positivo** [o **semidefinido positivo**] si T es autoadjunto y además para cada $x \neq 0$ se cumple que $\langle T(x), x\rangle > 0$ [o $\langle T(x), x\rangle \geq 0$]. Una matriz A con entradas en $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ es llamada **definida positiva** [o **semidefinida positiva**] si L_A es definido positivo [o semidefinido positivo].

37. Sean T y U operadores lineales autoadjuntos definidos sobre un espacio V de dimensión n con producto interno y sea $A = [T]_\beta$, donde β es una base ortonormal para V. Pruebe que:
   (a) T es definido positivo [semidefinido positivo] si y sólo si todos sus eigenvalores son positivos [no negativos],
   (b) T es definido positivo si y sólo si $\sum_{i,j} A_{ij}a_j\overline{a_i} > 0$ para todas las n-adas no nulas $(a_1, a_2, ..., a_n)$.
   (c) T es semidefinido positivo si y sólo si $A = B^*B$ para alguna matriz cuadrada B.
   (d) Si T y U son operadores semidefinidos positivos tales que $T^2 = U^2$, entonces $T = U$.
   (e) Si T y U son operadores definidos positivos tales que $UT = TU$, entonces TU es definido positivo.
   (f) T es definido positivo [semidefinido positivo] si y sólo si A es definida positiva [semidefinida positiva]. Observe que el inciso (f) implica que los enunciados puestos de (a) a (d), son válidos para matrices también.
   (g) Sea V un espacio con producto interior sobre F. Decimos que un operador T en V tiene raíz cuadrada si existe un operador $U : V \to V$ tal que $T = U^2$; al operador U le llamamos el operador raíz de T. Suponga que $F = \mathbb{R}$ y que V es de dimensión finita. Pruebe que si T es un operador lineal semidefinido positivo, entonces existe un único operador raíz de T semidefinido positivo.

38. Sea V un espacio con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, y sea T un operador lineal definido positivo sobre V. Pruebe que $\langle x, y\rangle' = \langle T(x), y\rangle$ define otro producto interno sobre V.

39. Sea V un espacio de dimensión finita con producto interno y sean T y U operadores autoadjuntos sobre V tales que T es definido positivo. Demuestre que UT y TU son diagonalizables y son tales que todos sus eigenvalores son reales. *Sugerencia:* Pruebe que UT es autoadjunto con respecto al producto interno $\langle x, y\rangle' = \langle T(x), y\rangle$. Para probar que TU es autoadjunto, repita el argumento utilizando T^{-1} en lugar de T.

40. Para obtener un recíproco al ejercicio 34: Si V es un espacio de dimensión finita con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, y $\langle \cdot, \cdot \rangle'$ es otro producto interno para V. Pruebe lo siguiente:
   (a) Existe un único operador lineal T definido sobre V tal que $\forall x, y \in V$ $\langle x, y\rangle' = \langle T(x), y\rangle$. *Sugerencia:* Sea $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ una base ortonormal para V con respecto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Defina una matriz A de manera que $A_{ij} = \langle v_i, v_j\rangle'$ para todo $1 \leq i, j \leq n$. Sea T el único operador lineal en V tal que $[T]_\beta = A$.
   (b) Pruebe que el operador obtenido en (a) es definido positivo con respecto a ambos productos internos.