Tarea III de Álgebra Lineal I

Semestre 2020-I

11 de septiembre de 2019

Profra: Gabriela Campero Arena · Ayudtes: Yanh Vissuet, Mariana Garduño y Carlos Flores

1. Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita sobre el campo F. Sea $T : V \to W$. Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, dando prueba o contraejemplo:

   (i) Si T es lineal, entonces $T(0_V) = 0_W$.

   (ii) Si T es lineal, entonces T lleva subconjuntos linealmente independientes de V en subconjuntos linealmente independientes de W.

   (iii) Dados $x_1, x_2 \in V$ y $y_1, y_2 \in W$, existe una transformación lineal $U : V \to W$ tal que $U(x_1) = y_1$ y $U(x_2) = y_2$.

2. Sean V y W espacios vectoriales sobre el campo F. Demuestre las siguientes caracterizaciones de linealidad de una transformación $T : V \to W$.

   (i) T es lineal si y sólo si $\forall\, c \in F\ \forall\, x, y \in V\ (T(cx + y) = cT(x) + T(y))$.

   (ii) T es lineal si y sólo si $\forall\, c_1, ..., c_n \in F\ \forall\, x_1, ..., x_n \in V\ (T(\sum_{i=1}^n c_i x_i) = \sum_{i=1}^n c_i T(x_i))$.

3. Diga si las siguientes transformaciones son lineales, justificando su respuesta. Si sí son lineales, dé bases para $N(T)$, $R(T)$, diga cuál es la nulidad y el rango de T, y si T es inyectiva o sobre.

   (i) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida como $T(a_1, a_2) = (a_1 + a_2, 0, 2a_1 - a_2)$;

   (ii) $T : M_{2\times3}(F) \to M_{2\times2}(F)$ definida como $T\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} - a_{12} & a_{13} + 2a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, para cualquier campo F;

   (iii) $T : M_{n\times n}(F) \to F$ definida como $T(A) = tr(A)$, para cualquier campo F;

   (iv) $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ definida como $T(f(x)) = xf(x) + f'(x)$;

   (v) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida como $T(a_1, a_2) = (1, a_2)$;

   (vi) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida como $T(a_1, a_2) = (a_1, a_2^2)$;

   (vii) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida como $T(a_1, a_2) = (a_1 + 1, a_2)$.

4. ¿Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1, 1) = (1, 0, 2)$ y $T(2, 3) = (1, -1, 4)$. ¿A qué es igual $T(8, 11)$? ¿Es T inyectiva? Justifique sus respuestas.

5. ¿Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, 0, 3) = (1, 1)$ y $T(-2, 0, -6) = (2, 1)$? Justifique su respuesta.

6. Sean V y W espacios vectoriales sobre un campo F y sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Demuestre lo siguiente.

   (i) Sea $\{w_1, w_2, ..., w_k\}$ un subconjunto linealmente independiente de $R(T)$. Si el subconjunto $S = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ de V es tal que $\forall\, i \in \{1, ..., k\}\ T(v_i) = w_i$, entonces S es linealmente independiente.

   (ii) T es inyectiva si y sólo si T lleva subconjuntos linealmente independientes de V a subconjuntos linealmente independientes de W.

   (iii) Suponga que T es inyectiva y que $S \subseteq V$. Entonces S es linealmente independiente si y sólo si $T[S]$ es linealmente independiente, donde $T[S] = \{T(x) : x \in S\}$.

   (iv) Si $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es una base para V y T es biyectiva, entonces $T[\beta] = \{T(v_1), T(v_2), ..., T(v_n)\}$ es base para W.

7. Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita sobre el campo F y sea $T : V \to W$ lineal. Demuestre lo siguiente.

   (i) Si $dim(V) < dim(W)$, entonces T no puede ser sobre.

   (ii) Si $dim(V) > dim(W)$, entonces T no puede ser inyectiva.

8. Demuestre lo siguiente y explique por qué estos hechos no contradicen el Teorema 2.6 visto en clase.

   (i) Sea $T : P(\mathbb{R}) \to P(\mathbb{R})$ definida como $T(f(x)) = \int_0^x f(t)dt$. Entonces T es lineal e inyectiva, pero no sobre.

   (ii) Sea $T : P(\mathbb{R}) \to P(\mathbb{R})$ definida como $T(f(x)) = f'(x)$. Entonces T es lineal y sobre, pero no inyectiva.

9. Dé un ejemplo de una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $N(T) = R(T)$.

10. Dé un ejemplo de dos transformaciones lineales distintas $T : V \to W$ y $U : V \to W$ tales que $N(T) = N(U)$ y $R(T) = R(U)$.

11. Sean V_1 y W_1 subespacios de los espacios vectoriales V y W respectivamente. Si $T : V \to W$ es lineal, demuestre que $T(V_1)$ es subespacio de W y que $\{x \in V : T(x) \in W_1\}$ es un subespacio de V.

12. Sea V el espacio vectorial de las sucesiones en $\mathbb{R}$ tales que sólo un número finito de sus entradas son no nulas, es decir, $V = \{\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} |$ el número de n's tales que $a_n \neq 0$ es finito $\}$. Defínanse las funciones $T, U : V \to W$ de la siguiente manera: $T(a_1, a_2, a_3, ...) = (a_2, a_3, ...)$ y $U(a_1, a_2, a_3, ...) = (0, a_1, a_2, ...)$. T y U se llaman los operadores "shift izquierdo" y "shift derecho" de V, respectivamente.

    (i) Demuestre que T y U son lineales.
    (ii) Demuestre que T es sobre, pero no inyectiva.
    (iii) Demuestre que U es inyectiva, pero no sobre.

13. Sea V un espacio vectorial y sean W_1 y W_2 subespacios de V tales que $V = W_1 \oplus W_2$. Una función $T : V \to V$ se llama la *proyección sobre* W_1 *a lo largo de* W_2 si para $x = x_1 + x_2$ con $x_1 \in W_1$ y $x_2 \in W_2$, se tiene que $T(x) = x_1$.

    (i) Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida como $T(a, b, c) = (a - c, b, 0)$. Demuestre que T es una proyección sobre el plano xy a lo largo de la recta $L = \{(a, 0, a) : a \in \mathbb{R}\}$.
    (ii) Sea V un espacio vectorial y sean W_1 y W_2 subespacios de V tales que $V = W_1 \oplus W_2$. Sea $T : V \to V$ una proyección sobre W_1 a lo largo de W_2.
        (a) Demuestre que T es lineal.
        (b) Demuestre que $W_1 = \{x \in V : T(x) = x\}$.
        (c) Demuestre que $R(T) = W_1$ y $N(T) = W_2$.
        (d) Describa T si $W_1 = V$.
        (e) Describa T si $W_1 = \{\overline{0}\}$.
    (iii) Sea W un subespacio de un espacio vectorial V de dimensión finita.
        (a) Demuestre que existen un subespacio W' de V y una función $T : V \to V$ tales que T es una proyección sobre W a lo largo de W'.
        (b) Dé un ejemplo de un espacio vectorial V y un subespacio W de V tales que haya dos proyecciones sobre W a lo largo de dos subespacios (distintos).

14. Sea V un espacio vectorial y sea $T : V \to V$ lineal. Decimos que un subespacio W de V es T*-invariante* si $\forall\, x \in W\ (T(x) \in W)$, es decir, $T[W] \subseteq W$. Si W es T-invariante, definimos *la restricción de* T *en* W como la función $T_W : W \to W$ tal que $\forall\, x \in W (T_W(x) = T(x))$.

    (i) Sea $T : V \to V$ lineal. Demuestre que $\{\overline{0}\}$, V, $N(T)$ y $R(T)$ son todos T-invariantes.
    (ii) Sea $T : V \to V$ lineal. Si un subespacio W de V es T-invariante, demuestre que T_W es lineal.
    (iii) Sea $T : V \to V$ lineal y sea W un subespacio de V. Si T es una proyección sobre W a lo largo de algún subespacio W', demuestre que W es T-invariante y que $T_W = I_W$.

15. Sea $T : V \to V$ lineal y sea W un subespacio de V. Suponga que $V = R(T) \oplus W$ y que W es T-invariante.

    (i) Demuestre que $W \subseteq N(T)$.
    (ii) Demuestre que si V tiene dimensión finita, entonces $W = N(T)$.
    (iii) Dé un ejemplo para probar que si V no es de dimensión finita, entonces la conclusión del inciso (ii) no es necesariamente cierta.

16. Demuestre la generalización del Teorema 2.3 visto en clase al caso en que la base β sea infinita, es decir, demuestre que si $T : V \to W$ es lineal y β es una base para V, entonces $R(T) = \langle\{T(v) : v \in \beta\}\rangle$.

17. Demuestre la siguiente generalización del Teorema 2.8 visto en clase al caso en que la base β sea infinita, es decir, demuestre que si V y W son espacios vectoriales sobre el campo F, β es una base para V y $f : \beta \to W$ es cualquier función, entonces existe una única transformación lineal $T : V \to W$ tal que $\forall\, x \in \beta\ (T(x) = f(x))$.

18. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea $T : V \to V$ una transformación lineal. Demuestre lo siguiente, teniendo cuidado de decir dónde utiliza la hipótesis de que V es de dimensión finita.

    (i) Si $V = R(T) + N(T)$, entonces $V = R(T) \oplus N(T)$.
    (ii) Si $R(T) \cap N(T) = \{\overline{0}\}$, entonces $V = R(T) \oplus N(T)$.

19. Sean V y T definidos como en el ejercicio 12.

    (i) Demuestre que $V = R(T) + N(T)$, pero que esta suma no es directa, por lo que el resultado del inciso (i) del ejercicio anterior no se puede probar sin asumir que V es de dimensión finita.
    (ii) Encuentre una transformación lineal $T_1 : V \to V$ tal que $R(T_1) \cap N(T_1) = \{\overline{0}\}$, pero tal que V no sea la suma directa de $R(T_1)$ y $N(T_1)$, mostrando que el resultado del inciso (ii) del ejercicio anterior no se puede probar sin asumir que V es de dimensión finita.

20. Una función $T : V \to W$, donde V y W son espacios vectoriales sobre el campo F, se llama *aditiva* si $\forall\, x, y \in V$ $(T(x+y) = T(x) + T(y))$.

    (i) Demuestre que si $T : V \to W$ es aditiva y $F = \mathbb{Q}$, entonces T es lineal.

    (ii) Demuestre que existe una función $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que es aditiva, pero no lineal. *Sugerencia:* Sea V el conjunto de los números reales visto como un espacio vectorial sobre el campo de los números racionales. Por un ejercicio de la tarea anterior, sabemos que V tiene dimensión infinita. Sea β una base para V. Sean x y y dos vectores distintos de β y defínase $f : \beta \to V$ como $f(x) = y$, $f(y) = x$ y $f(z) = z$ en otro caso. Por el ejercicio 17, sabemos que existe una transformación lineal $T : V \to V$ tal que $T(u) = f(u)$ para toda $u \in \beta$. Entonces T es aditiva, sin embargo para $c = y/x$ se tiene que $T(cx) \neq cT(x)$.

21. Dé la definición explícita de una transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ que tenga como rango al subespacio generado por los vectores $(1, 0, -1)$ y $(1, 2, 2)$. ¿Es única esta transformación lineal? Justifique su respuesta.

22. Dé la definición explícita de una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1,1,1) = (4,2)$, $T(1,1,0) = (5,1)$ y $T(1,0,0) = (2,1)$. ¿Es única esta transformación lineal? Justifique su respuesta.

23. Dé la definición explícita de una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $T(1,0,0) = 2x^2$ y $T(0,1,0) = x + 1$. ¿Es única esta transformación lineal? Justifique su respuesta.

24. Sean V y W espacios vectoriales sobre un campo F y sean β y γ bases ordenadas para V y W, respectivamente. Sean $T : V \to W$ y $U : V \to W$ transformaciones lineales. Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando con prueba o contraejemplo.

    (i) Si $[T]_\beta^\gamma = [U]_\beta^\gamma$, entonces $T = U$.

    (ii) Si $dim(V) = m$ y $dim(W) = n$, entonces $[T]_\beta^\gamma$ es una matriz de $m \times n$.

    (iii) $\mathbb{L}(V, W)$ es un espacio vectorial.

    (iv) $[T + U]_\beta^\gamma = [T]_\beta^\gamma + [U]_\beta^\gamma$.

    (v) $\forall\, a \in F [aT]_\beta^\gamma = a[T]_\beta^\gamma$.

    (vi) $\mathbb{L}(V, W) = \mathbb{L}(W, V)$.

25. En cada uno de los siguientes incisos calcule $[T]_\beta^\gamma$:

    (i) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida como $T(a_1, a_2) = (2a_1 - a_2, 3a_1 + 4a_2, a_1)$, con β la base ordenada canónica de $\mathbb{R}^2$ y γ la base ordenada canónica de $\mathbb{R}^3$;

    (ii) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida como $T(a_1, a_2, a_3) = (2a_2 + a_3, -a_1 + 4a_2 + 5a_3, a_1 + a_3)$, con β la base ordenada canónica de $\mathbb{R}^3$ y $\gamma = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$;

    (iii) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida como $T(a_1, a_2) = (a_1 - a_2, a_1, 2a_1 + a_2)$, con $\beta = \{(1,2), (2,3)\}$ y $\gamma = \{(1,1,0), (0,1,1), (2,2,3)\}$;

    (iv) $T : M_{2\times 2}(F) \to M_{2\times 2}(F)$ definida como $T(A) = A^t$, donde β y γ son ambas la base canónica de $M_{2\times 2}(F)$;

    (v) $T : M_{2\times 2}(F) \to F$ definida como $T(A) = tr(A)$, con β la base canónica de $M_{2\times 2}(F)$ y $\gamma = \{1\}$;

    (vi) $T : M_{2\times 2}(F) \to P_2(F)$ definida como $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b) + (2d)x + bx^2$, con β la base canónica de $M_{2\times 2}(F)$ y γ la base canónica de $P_2(F)$.

26. Sea V un espacio vectorial sobre un campo F y sea $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ una base ordenada para V. Defínase $v_0 = \overline{0}$. Por el Teorema 2.8 visto en clase existe una transformación lineal $T : V \to V$ tal que $\forall\, j \in \{1, ..., n\}$ $T(v_j) = v_{j-1}$. Calcule $[T]_\beta$.

27. Sea V un espacio vectorial sobre un campo F con dimensión finita n y sea $T : V \to V$ una transformación lineal. Recuerde la definición de subespacio T-invariante dada en el Ejercicio 14. Demuestre que si W es un subespacio T-invariante de V tal que $\dim(W) = k$, entonces existe una base β de V tal que la matriz $[T]_\beta$ tiene la forma $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ donde $A \in M_{k\times k}(F)$, y $0 \in M_{(n-k)\times k}(F)$ y tiene cero en todas sus entradas.

28. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sean W y W' subespacios de V. Sea T la proyección sobre W a lo largo de W' (véase definición en Ejercicio 13). Encuentre una base ordenada β de V de forma que $[T]_\beta$ sea una matriz diagonal, justificando su respuesta.

29. Sean V y W espacios vectoriales sobre un campo F y sean $T, U : V \to W$ transformaciones lineales no cero. Demuestre que si $R(T) \cap R(U) = \{\overline{0}\}$, entonces $\{T, U\}$ es un conjunto linealmente independiente en el espacio vectorial $\mathbb{L}(V, W)$.

30. Sea $n \in \mathbb{N}^+$. Para cada $j \in 1, \ldots, n$ defínase $T_j : P(\mathbb{R}) \to P(\mathbb{R})$ como $T(f) = f^{(j)}$, donde $f^{(j)}$ denota la j-ésima derivada de f. Demuestre que el subconjunto $\{T_1, \ldots, T_n\}$ de $\mathbb{L}(P(\mathbb{R}))$ es linealmente independiente.

31. Sean V y W espacios vectoriales sobre F con dimensión finita y sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Demuestre que si $\dim(V) = \dim(W)$, entonces existen bases ordenadas β para V y γ para W tales que $[T]_\beta^\gamma$ es una matriz diagonal.

32. Sean V, W y Z espacios vectoriales de dimensión finita. Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando con prueba o contraejemplo.

    (i) Si α y β son bases ordenadas para V y W respectivamente, y $T : V \to W$ es una transformación lineal, entonces $\forall\, v \in V\ [T(v)]_\beta = [T]_\alpha^\beta [v]_\alpha$.

    (ii) Si α, β y γ son bases ordenadas para V, W y Z respectivamente, y $U : W \to Z$ es una transformación lineal, entonces $\forall\, w \in W\ [U(w)]_\beta = [U]_\alpha^\beta [w]_\beta$.

    (iii) Si α es una base ordenada cualquiera para V, I_V es la transformación identidad en V y I es la matriz identidad de $dim(V) \times dim(V)$, entonces $[\mathsf{I}_V]_\alpha = I$

    (iv) Si α y β son bases ordenadas para V y $T : V \to V$ es una transformación lineal, entonces $[T^2]_\alpha^\beta = ([T]_\alpha^\beta)^2$.

    (v) Si A es una matriz tal que $A^2 = I$, entonces $A = I$ o $A = -I$, donde I es la matriz identidad.

    (vi) Si A es una matriz tal que $A^2 = 0$, entonces $A = 0$, donde 0 es la matriz tal que todas sus entradas son 0.

    (vii) Sean $T : V \to W$ y $U : W \to Z$ transformaciones lineales. Si UT es inyectiva, entonces T es inyectiva.

    (viii) Sean $T : V \to W$ y $U : W \to Z$ transformaciones lineales. Si UT es inyectiva, entonces U es inyectiva.

    (ix) Sean $T : V \to W$ y $U : W \to Z$ transformaciones lineales. Si UT es sobre, entonces T es sobre.

    (x) Sean $T : V \to W$ y $U : W \to Z$ transformaciones lineales. Si UT es sobre, entonces U es sobre.

33. Sea $g(x) = 3 + x$. Defínanse las transformaciones lineales $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ como $T(f(x)) = f'(x)g(x) + 2f(x)$, y $U : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ como $U(ax^2 + bx + c) = (a + b, c, a - b)$. Sean β y γ las bases canónicas de $P_2(\mathbb{R})$ y de $\mathbb{R}^3$ respectivamente. Calcule directamente las matrices $[T]_\beta^\beta$, $[U]_\beta^\gamma$ y $[UT]_\beta^\gamma$. Compruebe que $[UT]_\beta^\gamma = [U]_\beta^\gamma [T]_\beta^\beta$. Sea $h(x) = 3 - 2x + x^2$, compruebe que $[U(h(x))]_\gamma = [U]_\beta^\gamma [h(x)]_\beta$.

34. Sea F un campo cualquiera y sean $n, m, p, q \in \mathbb{N}^+$. Demuestre lo siguiente.

    (i) Si $A \in M_{m\times n}(F)$ y $B \in M_{n\times p}(F)$, entonces $\forall\, a \in F\ a(AB) = (aA)B = A(aB)$.

    (ii) Si $B \in M_{n\times p}(F)$ y para cada $j \in \{1, ..., p\}$, v_j es la j-ésima columna de B y e_j es el j-ésimo vector de la base canónica de F^p, entonces $v_j = Be_j$.

    (iii) Si $A \in M_{m\times n}(F)$ y $B \in M_{m\times n}(F)$, entonces $L_{A+B} = L_A + L_B$.

    (iv) Si $A \in M_{m\times n}(F)$, entonces $\forall\, a \in F\ L_{aA} = aL_A$.

    (v) Si I_n es la matriz identidad de $n \times n$ con entradas en F y I_{F^n} es la transformación identidad en F^n, entonces $L_{I_n} = \mathsf{I}_{F^n}$.

    (vi) Sean $A \in M_{m\times n}(F)$, $B_1, B_2, ..., B_k \in M_{n\times p}(F)$, y $a_1, a_2, ..., a_k \in F$. Entonces $A\left(\sum_{i=1}^k a_i B_i\right) = \sum_{i=1}^k a_i AB_i$.

    (vii) Sean $A \in M_{m\times n}(F)$, $C_1, C_2, ..., C_k \in M_{q\times m}(F)$ y $a_1, a_2, ..., a_k \in F$. Entonces $\left(\sum_{i=1}^k a_i C_i\right) A = \sum_{i=1}^k a_i C_i A$.

35. Usando sólo la definición de multiplicación de matrices, demuestre que la multiplicación de matrices es asociativa.

36. (i) Sea V un espacio vectorial sobre un campo F, sean $T, U_1, U_2 \in \mathbb{L}(V)$ y sea I la transformación identidad de V. Demuestre lo siguiente.

    (a) $T(U_1 + U_2) = TU_1 + TU_2$ y $(U_1 + U_2)T = U_1T + U_2T$.
    (b) $T(U_1U_2) = (TU_1)U_2$.
    (c) $\forall\, a \in F a(U_1U_2) = (aU_1)U_2 = U_1(aU_2)$.
    (d) $T\mathsf{I} = \mathsf{I}T = T$.

    (ii) Enuncie y demuestre resultados más generales que los del inciso (i) anterior que involucren transformaciones lineales cuyos dominios no necesariamente sean iguales a sus codominios.

37. Sea F un campo cualquiera. Encuentre transformaciones lineales $T, U : F^2 \to F^2$ tales que $UT = T_0$ (la transformación nula) pero $TU \neq T_0$. Utilice su respuesta para encontrar matrices A, B en $M_{2\times 2}(K)$ tales que $AB = 0$ pero $BA \neq 0$, donde 0 es la matriz tal que todas sus entradas son 0.

38. Sea V un espacio vectorial y sea $T : V \to V$ una transformación lineal. Demuestre que $T^2 = T_0$ si y sólo si $R(T) \subseteq N(T)$.

39. Sea V un espacio vectorial con dimensión finita y sea $T : V \to V$ es una transformación lineal.

    (i) Demuestre que si rango(T) = rango(T^2), entonces $N(T) \cap R(T) = \{\bar{0}\}$. Deduce que entonces $V = R(T) \oplus N(T)$.

    (ii) Demuestre que existe un entero positivo k tal que $V = R(T^k) \oplus N(T^k)$.

40. Sea V un espacio vectorial. Determine todas las transformaciones lineales $T : V \to V$ tales que $T = T^2$. *Sugerencia:* Observe que para toda $x \in V$, $x = T(x) + (x - T(x))$ y pruebe que $V = \{y : T(y) = y\} \oplus N(T)$.

41. Sean V un espacio vectorial de dimensión infinita y β una base para V. Demuestre que existe $T : V \to V$ lineal tal que $R(T) + N(T) = V$ y $N(T) \cap R(T) \neq \{\bar{0}\}$. *Sugerencia*: Considere $\beta_0 = \{v_i : i \in \mathbb{N}\}$ y $\beta_1 \subseteq \beta$ tal que $\beta_0 \cup \beta_1 = \beta$ y $\beta_0 \cap \beta_1 = \varnothing$. Defina $f : \beta \to V$ tal que $f(v_0) = \bar{0}$ y $f(v_{i+1}) = v_i$, con $i \in \mathbb{N}$ y tal que $f(x) = x$ si $x \in \beta_1$. Utilice un resultado adecuado para obtener lo buscado. Observe entonces que ningún espacio vectorial de dimensión infinita puede ser ejemplo de las afirmaciones en los ejercicios 18 y 39.