Ejercicios para el Examen II de Álgebra Superior I
Semestre 2020-I
28 de agosto de 2019

Profra: Gabriela Campero Arena — Ayudtes: Manuel Zúñiga y Mariana Garduño

Para tener algunos ejercicios calificados antes del examen que será el — **de septiembre**, hay que entregar los ejercicios que sean múltiplos de 3 (y si tienen incisos, los incisos pares de estos ejercicios) individualmente o por equipos a más tardar el — **de septiembre antes de las 3pm**.

1. Demuestre que el conjunto vacío es único, es decir, que existe un único conjunto que carece de elementos.

2. Demuestre que si A, B y C son cualesquiera conjuntos tales que $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$.

3. Sea A el conjunto de todos los números enteros que son múltiplos de 6, sea B el de todos los números enteros que son múltiplos de 2 y sea C el de los múltiplos de 3. Es decir,

$$\begin{aligned} A =& \{z \in \mathbb{Z} : \exists x\ (x \in \mathbb{Z} \wedge z = 6x)\}, \\ B =& \{z \in \mathbb{Z} : \exists x\ (x \in \mathbb{Z} \wedge z = 2x)\}, \\ C =& \{z \in \mathbb{Z} : \exists x\ (x \in \mathbb{Z} \wedge z = 3x)\}. \end{aligned}$$

Diga cuáles de las siguientes relaciones de contención son verdaderas o falsas, justificando sus respuestas:

a) $A \subseteq B$	*e*) $B \subseteq C$	*i*) $C \subsetneqq A$
b) $A \subseteq C$	*f*) $C \subseteq B$	*j*) $A \subsetneqq C$
c) $B \subseteq A$	*g*) $B \subsetneqq A$	*k*) $A = B$
d) $C \subseteq A$	*h*) $A \subsetneqq B$	*l*) $A = C$.

4. Diga de cuáles de los siguientes conjuntos es *elemento* el conjunto vacío, justificando sus respuestas:
   (i) $\varnothing$ (iii) $\{\{\varnothing\}\}$
   (ii) $\{\varnothing\}$ (iv) $\{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}\}$

5. Diga de cuáles de los siguientes conjuntos es *elemento* el conjunto $\{\varnothing\}$ y en cuáles está contenido, justificando sus respuestas:
   (i) $\varnothing$ (iii) $\{\{\varnothing\}\}$
   (ii) $\{\varnothing\}$ (iv) $\{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}\}$

6. Determine, si es posible, qué condiciones debe cumplir el número real x para que el intervalo $[x^2 - 1, x^2]$ de números reales esté contenido en el intervalo $[0, 4]$ y bajo qué condiciones la contención será propia.

7. Considere el intervalo real $(-2, 3] = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 3\}$. Para cada uno de los siguientes conjuntos universales encuentre $(-2, 3]^c$ y represéntelo en la recta real:
   (i) $U = \mathbb{R}$,
   (ii) $U = [-3, 3]$,
   (iii) $U = (-\infty, 5)$,
   (iv) $U = [-2, 10]$.

8. Considere el conjunto $A = \{x \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N}\, (x = 3k) \wedge x > 5\}$. Para cada uno de los siguientes conjuntos universales encuentre A^c:
   (i) $U = \mathbb{N}$,
   (ii) $U = \mathbb{Z}$,
   (iii) $U = \{x \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N}\, (x = 3k)\}$,
   (iv) $U = \{x \in \mathbb{N} : x > 5\}$.

9. Sean A y B subconjuntos cualesquiera de un conjunto universal U, demuestre que $A \subseteq B$ si y sólo si $B^c \subseteq A^c$.

10. Sean A y B subconjuntos cualesquiera de un conjunto universal U, demuestre que $A = B$ si y sólo si $B^c = A^c$.

11. Considere el conjunto universal $U = \{-7, -2, -1, 0, 5, 11, 23, 47, 100\}$ y los conjuntos $A = \{-7, 0, 5, 47, 100\}$ y $B = \{-1, 0, 5, 11, 23\}$. Encuentre:
    (i) $A \cap B$,
    (ii) $A^c \cap B$,
    (iii) $A \cap B^c$,
    (iv) $A^c \cap B^c$,
    (v) $(A \cap B)^c$.

12. Considere el conjunto universal $U = \mathbb{R}$ y los conjuntos $A = (-7, 1]$, $B = [-2, 4]$ y $C = [3, 9)$. Encuentre:
    (i) $A \cap B \cap C$,
    (ii) $A \cap B^c \cap C$,
    (iii) $(A \cap B)^c \cap C$,
    (iv) $A^c \cap B^c \cap C^c$.

13. Demuestre que para cualquier conjunto A, $A \cap \varnothing = \varnothing$.

14. Sea U un conjunto universal, demuestre que para cualquier subconjunto A de U, se tiene que $A \cap A^c = \varnothing$.

15. Demuestre que para cualesquiera conjuntos A y B, $(A \cap B) \subseteq A$.

16. Demuestre que para cualesquiera conjuntos A, B y C se tiene lo siguiente:

    (i) $A \subseteq B$ y $A \subseteq C$ si y sólo si $A \subseteq (B \cap C)$;
    (ii) si $A \subseteq C$ o $B \subseteq C$, entonces $A \cap B \subseteq C$;
    (iii) si $A \cap B = \varnothing$ y $C \subseteq A$, entonces $C \cap B = \varnothing$;
    (iv) si $A \subseteq B$, entonces $(A \cap C) \subseteq (B \cap C)$.

17. Sea U un conjunto universal, demuestre que para cualesquiera subconjuntos A y B de U,

    (i) $A \subseteq B^c$ si y sólo si $A \cap B = \varnothing$;
    (ii) si $A \cap B = \varnothing$, entonces $A \cap B^c = A$.

18. Justifique lo siguiente, dando lo que se llama un *contraejemplo*, es decir, un ejemplo en el que se cumplan las siguientes afirmaciones negadas. Observe que todas ellas son los recíprocos de afirmaciones demostradas en ejercicios anteriores.

    (i) No es cierto que $A \subseteq (A \cap B)$ para cualesquiera conjuntos A y B.
    (ii) Para cualesquiera conjuntos A, B y C no siempre es cierto que si $(A \cap C) \subseteq (B \cap C)$, se tenga que $A \subseteq B$.
    (iii) Para cualesquiera conjuntos A, B y C no siempre es cierto que si $(A \cap B) \subseteq C$, se tenga que $A \subseteq C$ o $B \subseteq C$.

19. Sea $\mathbb{N}$ el conjunto universal. Sean

    $$A = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es par } \} \text{ y } B = \{n \in \mathbb{N} : n < 10\}.$$

    Determine los siguientes conjuntos:
    (i) $A \cap B$ (iii) A^c (v) $(A \cap B)^c$
    (ii) $A \cup B$ (iv) B^c (vi) $A^c \cup B^c$

20. Sea $\mathbb{N}$ el conjunto universal. Sean

    $$A = \{n \in \mathbb{N} : n^2 > 2n-1\} \text{ y } B = \{n \in \mathbb{N} : n^2 = 2n+3\}.$$

    Determine los siguientes conjuntos:
    (i) $A \cap B$ (iii) A^c (v) $(A \cup B)^c$
    (ii) $A \cup B$ (iv) B^c (vi) $A^c \cap B^c$

21. Sean $A = [4, 8]$ y $B = (6, 13]$ los subconjuntos del conjunto universal $\mathbb{R}$. Determine los siguientes conjuntos:
    (i) $A \cap B$ (iii) $A^c \cup B$ (v) $(A^c \cup B^c) \cap B$
    (ii) $A \cup B$ (iv) $A \cup B^c$ (vi) $(A^c \cup B^c) \cap A$.

22. Sea U un conjunto universal y A un subconjunto cualquiera de U. Demuestre las siguiente igualdades:

    (i) $A \cup U = U$;
    (ii) $A \cup A^c = U$.

23. Sean A y B conjuntos cualesquiera, demuestre que $A \subseteq (A \cup B)$.

24. Sean A, B y C subconjuntos cualesquiera. Demuestre lo siguiente:

    (i) $A \subseteq C$ y $B \subseteq C$ si y sólo si $(A \cup B) \subseteq C$;
    (ii) si $A \subseteq B$, entonces $(A \cup C) \subseteq (B \cup C)$.

25. Sean A, B y C conjuntos cualesquiera. Pruebe las siguientes igualdades que involucran uniones e intersecciones:

    (i) $A \cup (A \cap B) = A$;
    (ii) $A \cap (A \cup B) = A$;
    (iii) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;
    (iv) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

26. Sean A y B subconjuntos cualesquiera de un conjunto universal U. Demuestre lo siguiente:

    (i) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$;
    (ii) $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$;
    (iii) $(A \cup B = U \wedge A \cap B = \varnothing)$ si y sólo si $A = B^c$;
    (iv) $A \cup B = U$ si y sólo si $A^c \subseteq B$;
    (v) $A \cap B = \varnothing$ si y sólo si $A \cup B^c = B^c$.

27. Sean A, B y C subconjuntos cualesquiera de un conjunto universal U. Pruebe las siguientes afirmaciones:

    (i) $((A \cap B) \cup (B \cap C)) \cup (C \cap A) = ((A \cup B) \cap (B \cup C)) \cap (C \cup A)$;
    (ii) $(A \cup (B \cap C))^c = A^c \cap (B^c \cup C^c)$;
    (iii) si $A \cap B = A \cap C$ y $A \cup B = A \cup C$, entonces $B = C$;
    (iv) $A \subseteq C$ si y sólo si $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$.

28. Justifique lo siguiente, dando un contraejemplo, es decir, un ejemplo en el que se cumplan las siguientes afirmaciones negadas. Observe que todas ellas son los recíprocos de afirmaciones demostradas en ejercicios anteriores.

    (i) No es cierto que $(A \cup B) \subseteq A$ para cualesquiera conjuntos A y B.
    (ii) Dados cualesquiera conjuntos A, B y C tales que $(A \cup C) \subseteq (B \cup C)$ no siempre es cierto que entonces $A \subseteq B$.
    (iii) Si A y B son subconjuntos de un conjunto universal U, el hecho de que $A \cup B = U$ no siempre implica que $A \subseteq B^c$.
    (iv) Si A, B y C son subconjuntos de un conjunto universal U, no siempre es cierto que $A \cup (B \cap C^c) = (A \cup B) \cap (A \cup C)^c$.

29. Sean $C = \{4k+1 | k \text{ es un natural}\}$ y $D = \{2k+1 | k \text{ es un natural}\}$. Pruebe que $C \subseteq D$ y determine el conjunto $D \setminus C$.

30. Pruebe que la diferencia de conjuntos tiene las siguientes propiedades:

    (i) Para cualquier conjunto A, $A \setminus \varnothing = A$.

    (ii) Para cualquier conjunto A, $A \setminus A = \varnothing$.

    (iii) Para cualquier conjunto A, $\varnothing \setminus A = \varnothing$.

31. (i) Demuestre que para cualesquiera conjuntos A, B y C se tiene que

$$((A \setminus B) \setminus C) \subseteq (A \setminus (B \setminus C)).$$

    (ii) Pruebe que la contención contraria del inciso anterior no siempre es cierta dando un contraejemplo.

32. Demuestre que para cualesquiera conjuntos A y B,

$$A \subseteq B \text{ si y sólo si } A \setminus B = \varnothing.$$

33. Sean A y B conjuntos cualesquiera. Demuestre las siguientes igualdades que involucran las operaciones de diferencia, intersección y unión:

    (i) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$;

    (ii) $A \setminus B = (A \cup B) \setminus B$;

    (iii) $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$;

    (iv) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;

    (v) $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$.

34. Sean A, B y C conjuntos cualesquiera. Demuestre las siguientes igualdades que involucran las operaciones de diferencia, intersección y unión:

    (i) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;

    (ii) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;

    (iii) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$;

    (iv) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$;

    (v) $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (C \setminus A)$;

35. Demuestre que para cualesquiera conjuntos A y B,

$$B \subseteq A \text{ si y sólo si } (A \setminus B) \cup B = A.$$

36. Demuestre que para cualesquiera conjuntos A, B y C, si $A \cap B = \varnothing$ y $A \cup B = C$, entonces $A = C \setminus B$.

37. Justifique lo siguiente, dando un contraejemplo. Observe que se pide probar que la recíproca del ejercicio anterior no es cierta.
    No es cierto que para cualesquiera conjuntos A, B y C el hecho de que $A = C \setminus B$ implique que $(A \cap B = \varnothing \wedge A \cup B = C)$.

38. Demuestre que para cualesquiera conjuntos A y B

$$A \vartriangle B = \varnothing \text{ si y sólo si } A = B.$$

39. (i) Demuestre que para cualesquiera conjuntos A, B y C se tiene que

$$A \vartriangle B \subseteq (A \vartriangle C) \cup (C \vartriangle B).$$

    (ii) Encuentre un ejemplo en el que la contención anterior sea propia y otro donde se dé la igualdad.

40. Demuestre que para cualesquiera conjuntos A, B y C, si $A \vartriangle B = A \vartriangle C$, entonces $B = C$. Gracias a que la diferencia simétrica es conmutativa, $B \vartriangle A = C \vartriangle A$, también implica que $B = C$. Es decir, se vale la ley de la cancelación para la diferencia simétrica.

41. Sean A y B los subconjuntos del conjunto universal $\mathbb{Z}$ dados por:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} : |\, x \,| \leq 3\} \quad \text{y} \quad B = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 \leq 7\}.$$

    Determine los siguientes conjuntos:

(i) $A \cap B$	(iv) $B \setminus A$	(vii) $A^c \cup B^c$
(ii) $A \cup C$	(v) $A \vartriangle B$	(viii) $A^c \cap B^c$
(iii) $A \setminus B$	(vi) A^c	

42. Sean A y B los subconjuntos del conjunto universal $\mathbb{R}$ dados por:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 = 0\} \quad \text{y} \quad B = \{x \in \mathbb{R} : |\, x \,| \leq 1\}.$$

    Determine los siguientes conjuntos:

(i) $A \cap B$	(iii) $(A \cup B)^c$	(v) $A \setminus B$
(ii) $A \cup C$	(iv) $A^c \cap B^c$	(vi) $A \vartriangle B$

43. Sean A y B los subconjuntos del conjunto universal $\mathbb{Z}$ dados por:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} : |\, x \,| \leq 4\} \quad \text{y} \quad B = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ divide a } 6\}.$$

    Determine los siguientes conjuntos:

(i) $A \cap B$	(iv) $B \setminus A$	(vii) $A^c \cup B^c$
(ii) $A \cup C$	(v) $A \vartriangle B$	(viii) $A^c \cap B^c$
(iii) $A \setminus B$	(vi) A^c	

44. Verifique que en efecto

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^+} [-n, n] = [-1, 1],$$

    y que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [-n, n] = \{0\}.$$

45. Sean I un subconjunto de $\mathbb{N}$ y para cada $i \in I$, sea A_i un conjunto. Demuestre que para toda $j \in I$,
$$\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq A_j.$$

46. Sea I un subconjunto cualquiera de $\mathbb{N}$ y para toda $i \in I$, sea A_i un conjunto. Sea A un conjunto cualquiera. Demuestre que si para alguna $j \in I$ se tiene que $A_j \subseteq A$, entonces $\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq A$.

47. Sean I un subconjunto de $\mathbb{N}$ y A un conjunto cualquiera. Demuestre que si para cada $i \in I$ se tiene que $A_i = A$, entonces
$$\bigcap_{i \in I} A_i = A.$$

48. Sea I un subconjunto cualquiera de $\mathbb{N}$ y para toda $i \in I$, sea A_i un conjunto. Demuestre que
$$\exists j \in I \bigcap_{i \in I} A_i = A_j \Leftrightarrow \exists j \in I \forall i \in I (A_j \subseteq A_i).$$

49. Sean I un subconjunto de $\mathbb{N}$ y para cada $i \in I$, sean A_i conjuntos cualesquiera. Demuestre que para toda $j \in I$,
$$A_j \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i.$$

50. Sean I un subconjunto de $\mathbb{N}$ y A un conjunto cualquiera. Supongamos que para alguna $i \in I$, $A \subseteq A_i$, demuestre que entonces
$$A \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i.$$

51. Sean I un subconjunto de $\mathbb{N}$ y para cada $i \in I$, sea A_i un subconjunto de un conjunto universal U. Demuestre que
$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c.$$

52. Sea I un subconjunto cualquiera de $\mathbb{N}$ y para cada $i \in I$, sea A_i un conjunto. Sea B un conjunto cualquiera. Demuestre lo siguiente.

(i)
$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cup B = \bigcup_{i \in I} (A_i \cup B).$$

(ii)
$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \cap B = \bigcap_{i \in I} (A_i \cap B).$$

53. Sea I un subconjunto cualquiera de $\mathbb{N}$ y para cada $i \in I$, sea A_i un conjunto. Sea Y un conjunto cualquiera. Demuestre que
$$Y \setminus \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (Y \setminus A_i).$$

54. Demuestre que para cualesquiera conjuntos A y B se tiene lo siguiente:

(i) $A \subseteq B$ si y sólo si $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$;

(ii) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$;

(iii) $\mathcal{P}(A) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$.

55. Dé un contraejemplo para justificar que no siempre es cierta la contención contraria del inciso (ii) del ejercicio anterior.

56. Sea $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 = 0\}$. Determine $\mathcal{P}(A)$.

57. Sea $A = \{\{1\}, \{\varnothing, 2\}, 3, \{4, 1\}\}$. Enliste los elementos de $\mathcal{P}(A)$.

58. Sean $A = \{5, \varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, 4\}, \{\pi\}\}$ y $B_1 = \{2, \{5, \{\varnothing\}\}\}$, $B_2 = \{\{\pi\}, \{5, \varnothing\}\}$ y $B_3 = \{5, \varnothing\}$.

Encuentre el conjunto $\mathcal{P}(A) \cap (B_1 \cup B_2 \cup B_3)$.