Tarea II de Lógica Matemática I

Semestre 2016-1

15 de septiembre de 2015

Profra: Gabriela Campero Arena Ayud: Héctor Olvera Vital

1. Dado $n \in \mathbb{N}$, ¿cuántas funciones booleanas de n lugares hay? Justifique su respuesta.
2. Dadas las siguientes funciones booleanas G_1 y G_2 de 3 lugares, encuentre fórmulas α_1 y α_2 de forma que su función booleana asociada sea G_1 y G_2 respectivamente:

$G_1(V,V,V) = V$	$G_2(V,V,V) = F$
$G_1(V,V,F) = F$	$G_2(V,V,F) = F$
$G_1(V,F,V) = F$	$G_2(V,F,V) = V$
$G_1(V,F,F) = V$	$G_2(V,F,F) = V$
$G_1(F,V,V) = V$	$G_2(F,V,V) = F$
$G_1(F,V,F) = V$	$G_2(F,V,F) = V$
$G_1(F,F,V) = F$	$G_2(F,F,V) = V$
$G_1(F,F,F) = V$	$G_2(F,F,F) = V$

3. (i) Pruebe que la fórmula $A \vee B$ es tautológicamente equivalente a una fórmula en la que sólo aparezca el conectivo $\rightarrow$.
   (ii) Pruebe que la fórmula $A \wedge B$ *no* es tautológicamente equivalente a ninguna fórmula en la que sólo aparezca el conectivo $\rightarrow$.
   (iii) Pruebe que la fórmula $A \leftrightarrow B$ *no* es tautológicamente equivalente a ninguna fórmula en la que sólo aparezca el conectivo $\rightarrow$.
4. Demuestre que cualesquiera dos conectivos del conjunto $\{\wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ pueden definir al restante.
5. Pruebe que los siguientes conjuntos de conectivos *no* son completos:
   (i) $\{\neg, \leftrightarrow\}$,
   (ii) $\{\vee, \rightarrow\}$,
   (iii) $\{\top, \rightarrow\}$,
   (iv) $\{\neg, \sharp\}$, donde $\sharp$ es el conectivo ternario de mayoría.
6. Sea $\mathcal{A}$ un conjunto con un solo conectivo binario. Demuestre que si $\mathcal{A}$ es completo, entonces $\mathcal{A} = \{|\}$ o $\mathcal{A} = \{\downarrow\}$.
7. Sea M el conectivo ternario de minoría. Demuestre que:
   (i) $\{M, \bot\}$ es completo,
   (ii) $\{M\}$ no es completo.
8. Pruebe que el conjunto de conectivos $\{\top, \bot, \neg, \leftrightarrow, +\}$ *no* es completo. *Sugerencia:* Pruebe que cualquier fórmula α en la que aparezcan sólo estos conectivos y los símbolos de enunciado A y B tiene un número par de valores de verdad V entre los cuatro posibles valores de $\overline{v}(\alpha)$.
9. Pruebe que $\{\wedge, \leftrightarrow, +\}$ es completo, pero que ningún subconjunto propio suyo es completo.
10. Pruebe que el conjunto de conectivos $\{\bot, \rightarrow\}$ es completo.
11. Transforme a una Forma Normal (Disyuntiva o Conjuntiva) completa cada una de las siguientes fórmulas:
    (i) $((Q \leftrightarrow P) \wedge (\neg P \rightarrow Q))$
    (ii) $((P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow R)))$
    (iii) $(\neg(\neg P) \leftrightarrow Q)$
    (iv) $(P \leftrightarrow R) \vee ((\neg\neg Q \rightarrow P) \wedge \neg R)$
12. Determine en cada inciso si $\Gamma \vDash \alpha$, utilizando alguna de las técnicas vistas en clase, y si $\Gamma \nvDash \alpha$ dé una asignación de verdad que invalide que $\Gamma \vDash \alpha$:
    (i) $\Gamma = \{P \rightarrow Q, Q \rightarrow R\}$ y $\alpha \leftrightharpoons P \rightarrow R$.
    (ii) $\Gamma = \{P \leftrightarrow Q, Q \rightarrow \neg R\}$ y $\alpha \leftrightharpoons \neg P$.
    (iii) $\Gamma = \{P, Q \vee R, \neg R \wedge P\}$ y $\alpha \leftrightharpoons (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$.
    (iv) $\Gamma = \{P \rightarrow Q, R \rightarrow S, \neg Q \vee \neg S\}$ y $\alpha \leftrightharpoons \neg P \vee \neg R$.

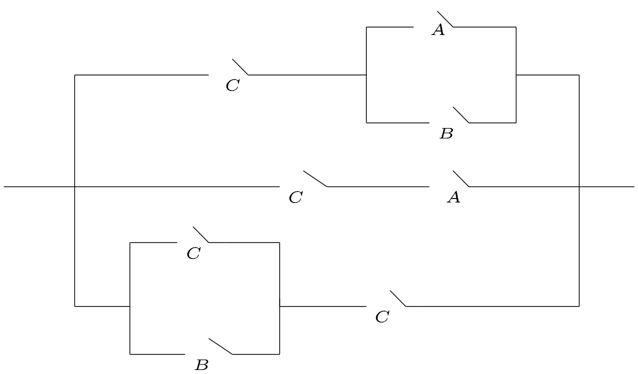
(v) $\Gamma = \{P \to Q, R \to S, P \vee R\}$ y $\alpha \leftrightharpoons Q \vee S$.
(vi) $\Gamma = \{P \to (R \wedge S), (Q \to R) \to P, R \wedge Q\}$ y $\alpha \leftrightharpoons Q \to P$.
(vii) $\Gamma = \{P \to \neg R, (S \wedge T) \to R, \neg S \to Q, \neg(P \to Q)\}$ y $\alpha \leftrightharpoons \neg T$.
(viii) $\Gamma = \{(P \wedge Q) \to R, \neg R \wedge S, \neg Q\}$ y $\alpha \leftrightharpoons \neg P$.
(ix) $\Gamma = \{P \to \neg Q, Q \to R, R \to \neg S\}$ y $\alpha \leftrightharpoons \neg S \vee \neg P$.
(x) $\Gamma = \{T \vee (D \to C), \neg(T \wedge (D \to C)), \neg D \to T\}$ y $\alpha \leftrightharpoons \neg C$.
(xi) $\Gamma = \{\neg T \to C, D \to S, \neg C \vee \neg S\}$ y $\alpha \leftrightharpoons P$.
(xii) $\Gamma = \{P \to Q, Q \to (R \wedge S), \neg P \vee \neg T\}$ y $\alpha \leftrightharpoons T \to S$.

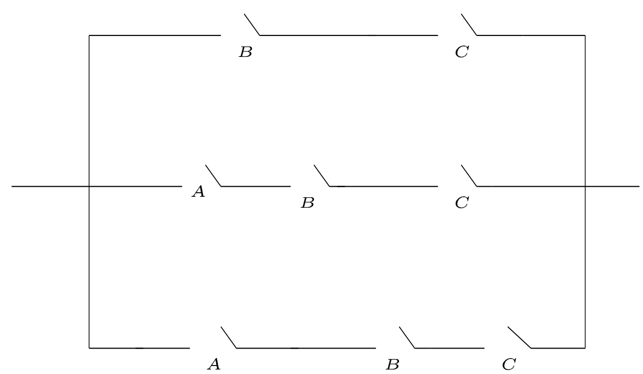
13. Construya circuitos lógicos para las siguientes fórmulas utilizando sólo los dispositivos mencionados:
    (i) $A \to B$, dispositivos disponibles: NAND de dos entradas;
    (ii) $\neg(A \wedge (B \to C)) \vee (D \leftrightarrow A)$, dispositivos disponibles: OR de dos entradas, NAND de dos entradas.

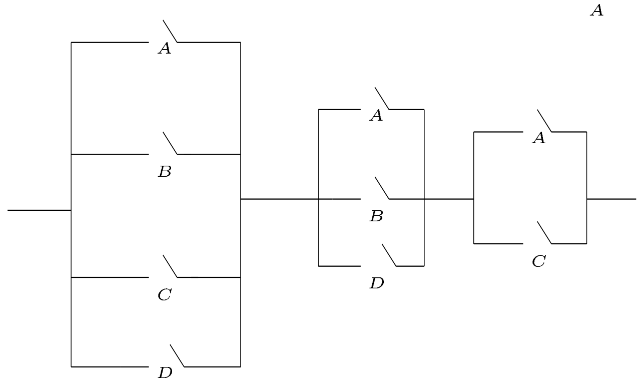
14. (i) Construya un circuito lógico con tres entradas A, B y C de forma que la salida coincida con la mayoría de A, B y C, sabiendo que los dispositivos disponibles son OR de dos entradas y AND de dos entradas.
    (ii) Construya un circuito lógico equivalente al del inciso anterior (otra vez usando sólo dispositivos OR de dos entradas y AND de dos entradas), pero en el que sólo se usen cuatro dispositivos y que tenga retraso 3.
    (iii) Demuestre que no existe ningún circuito equivalente a los anteriores con dispositivos OR de dos entradas y AND de dos entradas que use solamente tres dispositivos.

15. Determine el mínimo retraso de cada conectivo lógico clásico al ser construido por sólo dispositivos NAND de dos entradas.

16. Encuentre circuitos de relevadores más simples equivalentes a los siguientes (es decir, que contengan menos apagadores):







17. Supóngase que hay un comité con tres miembros y que cada uno vota "sí" a alguna propuesta cuando aprieta un botón. Encuentre un circuito de relevadores tan simple como pueda de tal forma que sólo pase corriente si al menos dos de los miembros votan "sí".

18. Supóngase que se quiere que la luz de un corredor sea controlada por dos apagadores de tal forma que apretando cualquiera de los dos se prenda la luz si está apagada, y se apague si está prendida. Construya un circuito que sirva para lograrlo.