Tarea II de Álgebra Lineal II
Semestre 2020-II
2 de marzo de 2020

Profra: Gabriela Campero Arena — Ayudte: Yanh Vissuet

I. Subespacios invariantes y el Teorema de Cayley Hamilton

1. Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas dando una prueba o un contraejemplo:
   (i) Existe un operador lineal T tal que su dominio no tiene ningún subespacio T-*invariante*.
   (ii) Si T es un operador lineal en un espacio vectorial dimensionalmente finito V y W es un subespacio T-*invariante* de V, entonces el polinomio característico de T_W divide al polinomio característico de T.
   (iii) Sea T un operador lineal definido en un espacio dimensionalmente finito V, y sean v y w vectores en V. Si W es el subespacio T-*cíclico* generado por v, W' es el subespacio T-*cíclico* generado por w, y $W = W'$, entonces $v = w$.
   (iv) Si T es un operador lineal definido en un espacio vectorial dimensionalmente finito V, entonces $\forall v \in V$, el subespacio T-*cíclico* generado por v es el mismo que el subespacio T-*cíclico* generado por $T(v)$.
   (v) Sea T un operador lineal definido sobre un espacio vectorial de dimensión n. Entonces existe un polinomio g(t) de grado n tal que $g(T) = T_0$.
   (vi) Cualquier polinomio de grado n cuyo coeficiente principal es $(-1)^n$ es el polinomio característico de algún operador lineal.
   (vii) Si T es un operador definido sobre un espacio vectorial dimensionalmente finito V, y si V es la suma directa de k subespacios T-*invariantes*, entonces existe una base ordenada β para V tal que $[T]_\beta$ es suma directa de k matrices.
2. Para cada uno de los siguientes operadores lineales T definidos en el espacio V, determine si W es un subespacio T-*invariante* de V:
   (i) $V = P_3(\mathbb{R})$, $T(f(x)) = f'(x)$, $W = P_2(\mathbb{R})$;
   (ii) $V = C([0,1])$, $T(f(t)) = [\int_0^1 f(x)dx]t$, $W = \{f \in V : \ f(t) = at + b \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}\}$;
   (iii) $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $T(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A$, $W = \{A \in V : \quad A^t = A\}$.
3. Sea T un operador lineal definido sobre un espacio vectorial V dimensionalmente finito. Pruebe que los siguientes subespacios son T-invariantes:
   (i) $\{\overline{0}\}$ y V; (ii) $N(T)$ y $R(T)$; (iii) E_λ para cualquier eigenvalor λ de T.
4. Sea T un operador lineal definido sobre un espacio vectorial V y sea W un subespacio T-invariante de V. Pruebe que W es $g(T)$-invariante para cualquier polinomio $g(t)$.
5. Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial V. Pruebe que la intersección de cualquier colección de subespacios T-invariantes de V es un subespacio T-invariante de V.
6. Para cada operador lineal T definido en el espacio vectorial V, encuentre una base ordenada para el subespacio T-cíclico generado por el vector z.
   (i) $V = P_3(\mathbb{R})$, $T(f(x)) = f''(x)$ y $z = x^3$
   (ii) $V = M_{2\times 2}$, $T(A) = A^t$ y $z = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
   (iii) $V = M_{2\times 2}$, $T(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} A$ y $z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
7. (a) Para cada operador lineal T y cada subespacio cíclico W del ejercicio anterior, calcule el polinomio característico de T_W de dos maneras distintas, como lo hicimos en el ejemplo 6 visto en clase.
   (b) Para cada operador lineal del ejercicio anterior, encuentre su polinomio característico $f(t)$, y verifique que el polinomio característico de T_W calculado en el inciso anterior, divide a $f(t)$.
8. Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial V, sea v un vector en V distinto de cero y sea W el subespacio T-cíclico de V generado por v. Pruebe que:
   (a) W es T-invariante.
   (b) Cualquier subespacio T-invariante de V que tenga a v, contiene a W.
9. Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial V. Sea $v \in V$ un vector distinto de cero y sea W el subespacio T-cíclico de V generado por v. Entonces:

(a) Demuestre que $\forall w \in V(w \in W$ si y sólo si existe un polinomio $g(t)$ tal que $w = g(T)(v))$.

(b) Demuestre que si W tiene dimensión finita, el polinomio $g(t)$ del inciso anterior siempre puede ser elegido de manera que su grado sea menor o igual a $dim(W)$.

10. Sea T un operador lineal definido sobre un espacio vectorial de dimensión finita V.
    (a) Pruebe que si el polinomio característico de T se descompone, entonces también se descompone el polinomio característico de la restricción de T a cualquier subespacio T-invariante de V.
    (b) Deduzca que si el polinomio característico de T se descompone, entonces cualquier subespacio no trivial T-invariante de V contiene un eigenvector de T.
11. Sea A una matriz de $n \times n$. Demuestre que $dim(\langle\{I_n, A, A^2, ...\}\rangle) \leq n$
12. Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial V y suponga que V es un subespacio T-cíclico de él mismo. Demuestre que si U es un operador lineal sobre V, entonces $UT = TU$ si y sólo si $U = g(T)$ para algún polinomio $g(t)$. *Sugerencia:* Suponga que V es T-cíclico generado por v y elija $g(t)$ de acuerdo al ejercicio 9 de manera que $g(T)(v) = U(v)$.
13. (a) Sea T un operador lineal definido sobre un espacio vectorial V de dimensión dos. Pruebe que o bien V es un subespacio T-cíclico de él mismo, o $T = cI$ para algún escalar c.
    (b) Sea T un operador lineal en un espacio vectorial V de dimensión dos y supongamos que para cualquier escalar c, $T \neq cI$. Pruebe que si U es un operador lineal sobre V tal que $UT = TU$, entonces $U = g(T)$ para algún polinomio $g(t)$.
14. Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial de dimensión finita V y sea W un subespacio T-invariante de V. Supongamos que $v_1, v_2, ..., v_k$ son eigenvectores de T correspondientes a distintos eigenvalores. Pruebe que si $v_1 + v_2 + ... + v_k \in W$, entonces $v_i \in W$ para toda i. *Sugerencia:* Utilice inducción matemática sobre k.
15. Demuestre que la restricción de un operador lineal diagonalizable T a cualquier subespacio T-invariante no trivial, también es diagonalizable. *Sugerencia:* Utilice el ejercicio anterior.
16. Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial V de dimensión n tal que T tiene n eigenvalores distintos. Demuestre que V es un subespacio T-cíclico de él mismo. *Sugerencia:* Utilice el ejercicio 14 para encontrar un vector v tal que $\{v, T(v), ..., T^{n-1}(v)\}$ es linealmente independiente.

Para los ejercicios del 17 al 19, considere a T como un operador lineal fijo definido sobre un espacio vectorial V de dimensión finita y W un subespacio T-invariante y no trivial de V.

Definición: Sea T un operador lineal definido sobre V y sea W un subespacio T-invariante de V. Definamos $\bar{T} : V/W \to V/W$ como $\bar{T}(v + W) = T(v) + W$, para cualquier $v + W \in V/W$

17. (a) Pruebe que $\bar{T}$ está bien definida y que es un operador lineal sobre V/W.
    (b) Sea $\eta : V \to V/W$ una transformación lineal dada por $\eta(v) = v + W$. Pruebe que el diagrama siguiente conmuta, es decir, pruebe que $\eta T = \bar{T}\eta$. (Observe que este ejercicio no requiere de la hipótesis de que V sea de dimensión finita).

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\eta"'] & V \arrow[d, "\eta"] \\ V/W \arrow[r, "\bar{T}"] & V/W \end{tikzcd}$$

18. (a) Sean $f(t), g(t)$ y $h(t)$ los polinomios característicos de T, T_W y $\bar{T}$ respectivamente. Pruebe que $f(t) = g(t)h(t)$. *Sugerencia:* Extienda una base $\gamma = \{v_1, ..., v_k\}$ de W a una base ordenada $\beta = \{v_1, ...v_k, v_{k+1}, ..., v_n\}$ de V. Luego pruebe que el conjunto de clases $\alpha = \{v_{k+1} + W, ..., v_n + W\}$ es una base ordenada para V/W. ¿Quién es $[T]_\beta$?.
    (b) Utilice la sugerencia del inciso anterior para probar que si T es diagonalizable, entonces $\bar{T}$ también lo es.
19. Pruebe el recíproco del ejercicio 36 de la tarea anterior: Si el polinomio característico de T se descompone, entonces hay una base ordenada β para V tal que $[T]_\beta$ es una matriz triangular superior. *Sugerencia:* Aplique inducción sobre la dimensión de V. Primero pruebe que T tiene un eigenvector v, y defina $W = L(v)$, para luego aplicar la hipótesis de inducción al operador $\bar{T}$.
20. Sea T un operador lineal definido sobre un espacio de dimensión finita V. Pruebe que T es diagonalizable si y sólo si V es la suma directa de subespacios T-invariantes de dimensión uno.
21. Sea T un operador lineal definido sobre un espacio dimensionalmente finito V y sean $W_1, ..., W_k$ subespacios T-invariantes de V tales que $V = W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_k$. Pruebe que T es diagonalizable si y sólo si T_{W_i} es diagonalizable para toda i.

II. Espacios con producto interior y normas

22. Establece si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, dando una prueba o un contraejemplo.
    (i) Un producto interior es una función que toma valores escalares y está definida sobre un conjunto de pares ordenados de vectores.
    (ii) Un espacio con producto interior debe estar sobre el campo de los números reales o complejos.
    (iii) Un producto interior es lineal en cada una de sus dos componentes.

(iv) Hay exactamente un producto interior en el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$

(v) La desigualdad del triángulo se cumple en cualquier espacio con producto interno dimensionalmente finito.

(vi) Sólo las matrices cuadradas pueden tener transpuesta-conjugada.

(vii) Si x, y y z son vectores en un espacio con producto interno tales que $\langle x, y\rangle = \langle y, z\rangle$, entonces $y = z$.

(viii) Si $\langle x, y\rangle = 0$ para toda x en un espacio con producto interior, entonces $y = 0$.

23. En $C([0, 1])$, sean $f(t) = t$ y $g(t) = e^t$. Calcule $\langle f, g\rangle$ como se definió en el ejemplo 3. Además, calcule $||f||, ||g||, ||f + g||$ y verifique que se cumplen las desigualdades de Cauchy-Schwarz y del triángulo.

24. En $\mathbb{C}^{\ 2}$, pruebe que $\langle x, y\rangle = xAy^*$ es un producto interno, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$. Calcule $\langle x, y\rangle$ para $x = (1 - i, 2 + 3i)$ y $y = (2 + i, 3 - 2i)$.

25. Sea V un espacio con producto interno. Demuestre lo siguiente.

(i) $\forall x, y, z \in V(\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle)$.

(ii) $\forall x, y \in V \forall c \in F(\langle x, cy\rangle = \bar{c}\langle x, y\rangle)$.

(iii) $\forall x \in V(\langle x, \overline{0}\rangle = \langle \overline{0}, x\rangle = 0)$.

(iv) $\forall x \in V(\langle x, x\rangle = 0 \iff x = \overline{0})$.

(v) $\forall v \in V(\forall u \in V \langle u, v\rangle = 0 \implies v = \overline{0})$.

(vi) $\forall y, z \in V(\forall x \in V \langle x, y\rangle = \langle x, z\rangle \implies y = z)$.

26. Sea β una base para un espacio vectorial de dimensión finita con producto interior V.

(a) Sea $x \in V$. Pruebe que si $\forall z \in \beta$ $(\langle x, z\rangle = 0)$, entonces $x = 0$.

(b) Sean $x, y \in V$. Pruebe que si $\forall z \in \beta$ $(\langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle)$, entonces $x = y$.

27. Sea V un espacio con producto interior. Demuestre lo siguiente.

(i) $\forall x \in V \forall c \in F(||cx|| = |c|\ ||x||)$.

(ii) $\forall x \in V(||x|| \geq 0)$ y $\forall x \in V(||x|| = 0 \iff x = \overline{0})$.

(iii) $\forall x, y \in V(|\langle x, y\rangle| \leq ||x||\ ||y||)$.

(iv) $\forall x, y \in V(||x + y|| \leq ||x|| + ||y||)$.

28. (a) Sea V un espacio con producto interior y supongamos que x y y son ortogonales en V. Pruebe que $||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$. Deduzca el Teorema de Pitágoras para $\mathbb{R}^2$.

(b) Pruebe la *ley del paralelogramo* para un espacio con producto interno V; esto es, pruebe que $\forall x, y \in V$, $||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2$. ¿Qué nos dice esta ecuación acerca de los paralelogramos en $\mathbb{R}^2$?.

29. Sea $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ un conjunto ortogonal en V y sean $a_1, a_2, ..., a_k \in F$. Pruebe que:

$$|| \textstyle\sum_{i=1}^n a_i v_i||^2 = \sum_{i=1}^n |a_i|^2 ||v_i||^2$$

30. Sean $A, B \in M_{n\times n}(F)$ y sea $c \in F$. Pruebe que $(A + cB)^* = A^* + \bar{c}B^*$.

31. (a) Pruebe que si V es un espacio con producto interno, entonces $|\langle x, y\rangle| = ||x|| \cdot ||y||$ si y sólo si alguno de los vectores x ó y es múltiplo del otro. *Sugerencia:* Si se da la igualdad y $y \neq 0$, sea $a = \frac{\langle x,y\rangle}{||y||^2}$ y sea $z = x - ay$. Pruebe que y y z son ortogonales y que $|a| = \frac{||x||}{||y||}$. Luego aplique el ejercicio 26(a) a $||x||^2 = ||ay + z||^2$.

(b) Obtenga un resultado similar para la igualdad $||x + y|| = ||x|| + ||y||$ y generalice para el caso de n vectores.

32. (a) Pruebe que el espacio vectorial H con la función $\langle \cdot, \cdot\rangle$ que se definió en clase, es un espacio con producto interno.

(b) Sea $V = C([0, 1])$ y definamos $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.
¿Es este un producto interno para V?.

33. Sea V un espacio vectorial sobre F, donde $F = \mathbb{R}$ ó $F = \mathbb{C}$ y sea W un espacio con producto interior sobre F con producto interior $\langle \cdot, \cdot\rangle$. Si $T : V \to W$ es lineal, pruebe que $\langle x, y\rangle' = \langle T(x), T(y)\rangle$ define un producto interno para V si y sólo si T es inyectiva.

34. Sea V un espacio vectorial con producto interno. Pruebe que:

(a) $\forall x, y \in V(||x \pm y||^2 = ||x||^2 \pm 2Re(\langle x, y\rangle) + ||y||^2)$.

(b) $\forall x, y \in V(|||x|| - ||y||| \leq ||x - y||)$.

Las siguientes son las llamadas *identidades polares*:

(c) Pruebe que si $F = \mathbb{R}$, $\forall x, y \in V(\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}||x + y||^2 - \frac{1}{4}||x - y||^2)$.

(d) Pruebe que si $F = \mathbb{C}$, $\forall x, y \in V(\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^4 i^k||x + i^k y||^2)$, donde $i^2 = -1$.

35. Sea V un espacio vectorial sobre los reales o los complejos (posiblemente de dimensión infinita) y sea β una base para V. Para cada $x, y \in V$, existen $v_1, v_2, ..., v_n \in \beta$ tales que $x = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ y $y = \sum_{i=1}^n b_i v_i$. Definamos

$$\langle x, y\rangle = \textstyle\sum_{i=1}^n a_i \bar{b}_i.$$

(a) Pruebe que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es un producto interno para V y que β es una base ortonormal para V. Por tanto, todo espacio vectorial real o complejo tiene un producto interno.
(b) Pruebe que si $V=\mathbb{R}^n$ o $V=\mathbb{C}^n$ y β es la base ordenada estándar, entonces el producto interior definido anteriormente es el canónico.

36. Sea $V=F^n$ y sea $A\in M_{n\times n}(F)$.
    (a) Pruebe que $\forall x,y\in V$ $(\langle x,Ay\rangle=\langle A^*x,y\rangle)$.
    (b) Supongamos que para alguna $B\in M_{n\times n}(F)$, se tiene que $\forall x,y\in V$ $(\langle x,Ay\rangle=\langle Bx,y\rangle)$. Pruebe que $B=A^*$.
    (c) Sea α la base ordenada canónica para V. Para cualquier base ortonormal β de V, sea Q la matriz de $n\times n$ cuyas columnas son los vectores en β. Pruebe que $Q^*=Q^{-1}$.
    (d) Defina operadores lineales T y U sobre V dados por $T(x)=Ax$ y $U(x)=A^*x$. Pruebe que $[U]_\beta=[T]_\beta^*$ para cualquier base ortonormal β de V.

Definición: Sea V un espacio vectorial sobre F, con $F=\mathbb{R}$ ó $F=C$. Sin importar si V cuenta o no con un producto interior, podemos definir una norma $||\cdot||$ como una función que toma valores reales y definida sobre V que cumpla las siguientes condiciones:
(1) $\forall x\in V(||x||\geq 0)$ y $\forall x\in V(||x||=0)$ si y sólo si $x=0$.
(2) $\forall x\in V\forall a\in F(||ax||=|a|\cdot||x||)$.
(3) $\forall x,y\in V(||x+y||\leq||x||+||y||)$.

37. Pruebe que las siguientes funciones son normas en el espacio vectorial V dado.
    (i) $V=M_{n\times n}(F)$; $\forall A\in V$ $(||A||=max\{|A_{ij}|\ \ 1\leq i,j\leq n\})$.
    (ii) $V=C([0,1])$; $\forall f\in V$ $(||f||=max\{|f(t)|\ \ t\in[0,1]\})$.
    (iii) $V=\mathbb{R}^2$; $\forall(a,b)\in V$ $(||(a,b)||=max\{|a|,|b|\})$.
38. Utilice el ejercicio 32 para probar que no hay ningún producto interno definido en $\mathbb{R}^2$ que induzca la norma definida en el ejercicio 37(iii).
39. Sea $||\cdot||$ una norma definida sobre V y definamos, para cada par de vectores, el escalar $d(x,y)=||x-y||$, denominada la *distancia* entre x y y. Pruebe que:
(a) $d(x,y)\geq 0$. (b) $d(x,y)=d(y,x)$. (c) $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$. (d) $d(x,y)=0$ si y sólo si $x=y$.
40. Sea $||\cdot||$ una norma sobre un espacio vectorial real que cumpla la ley del paralelogramo. Definamos:

$$\langle x,y\rangle=\frac{1}{4}[||x+y||^2-||x-y||^2].$$

Pruebe que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ define un producto interior sobre V tal que $\forall x\in V$ $(||x||^2=\langle x,x\rangle)$.

Sugerencias:

(i) Pruebe que $\forall x,y\in V$ $(\langle x,2y\rangle=2\langle x,y\rangle)$.
(ii) Pruebe que $\forall x,y,u\in V$ $(\langle x+u,y\rangle=\langle x,y\rangle+\langle u,y\rangle)$.
(iii) Pruebe que $\forall n\in\mathbb{N}^+$ $\forall x,y\in V$ $(\langle nx,y\rangle=n\langle x,y\rangle)$.
(iv) Pruebe que $\forall m\in\mathbb{N}^+$ $\forall x,y\in V$ $(m\langle\frac{1}{m}x,y\rangle=\langle x,y\rangle)$.
(v) Pruebe que $\forall r\in\mathbb{Q}$ $\forall x,y\in V$ $(\langle rx,y\rangle=r\langle x,y\rangle)$.
(vi) Pruebe que $\forall x,y\in V$ $(|\langle x,y\rangle|\leq||x||\,||y||)$. *Sugerencia:* La condición (3) en la definición de norma puede ser útil.
(vii) Pruebe que $\forall c\in\mathbb{R}$, $\forall r\in\mathbb{Q}$ y $\forall x,y\in V$, $|c\langle x,y\rangle-\langle cx,y\rangle|=|(c-r)\langle x,y\rangle-\langle(c-r)x,y\rangle|\leq 2|c-r|||x||||y||$.
(viii) Utilice el hecho de que $\forall c\in\mathbb{R}$, $|c-r|$ puede ser tan pequeño como queramos, donde $r\in\mathbb{Q}$, para demostrar el inciso (b) de la definición de producto interior.

41. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ y supongamos que $[\cdot,\cdot]$ es un producto interior real sobre V si tomamos a V como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Supongamos además que $\forall x\in V$ $([x,ix]=0)$. Sea $\langle\cdot,\cdot\rangle$ la función compleja definida por $\langle x,y\rangle=[x,y]+i[x,iy]$ para $x,y\in V$. Pruebe que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es un producto interior complejo sobre V.

42. Sea $||\cdot||$ una norma sobre un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ tal que satisface la ley del paralelogramo. Pruebe que existe un producto interior $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sobre V tal que $\forall x\in V$ $(||x||^2=\langle x,x\rangle)$. *Sugerencia:* Utilice los dos ejercicios anteriores.