Tarea II de Teoría de Conjuntos I

Semestre 2018-II

18 de febrero de 2018

Profra: Gabriela Campero Arena — Ayud: Manuel Zúñiga

1. Dada la definición de par ordenado de Kuratowski, demuestre que:
   (i) $\langle a,b\rangle = \langle c,d\rangle$ si y sólo si $a=c$ y $b=d$;
   (ii) $\langle a,b\rangle = \langle b,a\rangle$ si y sólo si $a=b$;
   (iii) $\langle a,b,c\rangle = \langle d,e,f\rangle$ si y sólo si $a=d$, $b=e$ y $c=f$;
   (iv) $\langle a,b,c,d\rangle = \langle e,f,g,h\rangle$ si y sólo si $a=e$, $b=f$, $c=g$ y $d=h$.
2. Para cualesquiera conjuntos a, b, A y B, demuestre lo siguiente:
   (i) si $a,b\in A$, entonces $\langle a,b\rangle \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$;
   (ii) $\langle a,b\rangle \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a,b\}))$;
   (iii) $a\in \bigcup\langle a,b\rangle$ y $b\in\bigcup\langle a,b\rangle$;
   (iv) si $\langle a,b\rangle\in A$, entonces $a\in\bigcup(\bigcup A)$ y $b\in\bigcup(\bigcup A)$;
   (v) $A\times B\subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(A\cup B))$.
3. Para cualesquiera conjuntos A, B, C y D demuestre lo siguiente:
   (i) $A\times B=\varnothing$ si y sólo si $A=\varnothing$ o $B=\varnothing$;
   (ii) $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$ y $C\times(A\cup B)=(C\times A)\cup(C\times B)$;
   (iii) $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$ y $C\times(A\cap B)=(C\times A)\cap(C\times B)$;
   (iv) $(A\setminus B)\times C=(A\times C)\setminus(B\times C)$;
   (v) $[(C\setminus A)\times D]\cup[C\times(D\setminus B)]=(C\times D)\setminus(A\times B)$;
   (vi) si $A\neq\varnothing$ y $C\neq\varnothing$, entonces: $A\subseteq B$ y $C\subseteq D$ si y sólo si $A\times C\subseteq B\times D$;
   Diga qué pasa si no se considera que $A\neq\varnothing$ o $C\neq\varnothing$.
4. Encuentre contraejemplos para las siguientes afirmaciones y justifíquelos:
   (i) $X\times Y=Y\times X$;
   (ii) $(X\times Y)\times Z=X\times(Y\times Z)$;
   (iii) $X^3=X\times X^2$, i.e. $(X\times X)\times X=X\times(X\times X)$.
5. Para cualesquiera conjuntos A y B demuestre lo siguiente:
   (i) $A\times B=\bigcup\{A\times\{b\}:b\in B\}$;
   (ii) $A\times\bigcup B=\bigcup\{A\times b:b\in B\}$.
6. Sea r una relación binaria. Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando con prueba o contraejemplo:
   (i) r es simétrica si y sólo si $r=r^{-1}$;
   (ii) r es transitiva si y sólo si $r\circ r\subseteq r$;
   (iii) r es transitiva si y sólo si $r\subseteq r\circ r$.
7. Sea r una relación binaria sobre un conjunto A. Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando con prueba o contraejemplo:
   (i) si r es reflexiva sobre A, entonces $Cam(r)=A$;
   (ii) si r es transitiva, entonces $Cam(r)=A$;
   (iii) si r es sin puntos asilados en A, entonces $Cam(r)=A$;
   (iv) si r es simétrica, entonces $Cam(r)=A$.
8. Sean r, s y t relaciones binarias cualesquiera. Demuestre que:
   (i) $\forall x\in dom(r)(\langle x,x\rangle\in r^{-1}\circ r)$;

(ii) $\forall y \in rang(r)(\langle y,y\rangle \in r \circ r^{-1})$;

(iii) $r \circ (s \circ t) = (r \circ s) \circ t$;

(iv) $(r \circ s)^{-1} = s^{-1} \circ r^{-1}$.

Observe que no se necesita especificar un conjunto para el dominio y rango de estas relaciones binarias para demostrar estos dos últimos incisos.

9. Sea A un conjunto y r una relación binaria sobre A. Demuestre lo siguiente:
   (i) r es relación de equivalencia sobre A si y sólo si r es simétrica, transitiva y sin puntos aislados en A;
   (ii) r es simétrica y antisimétrica si y sólo si $r \subseteq \{\langle a,a\rangle : a \in A\}$;
   (iii) r es relación de equivalencia sobre A si y sólo si r^{-1} es relación de equivalencia sobre A;
   (iv) si r es reflexiva, antisimétrica y transitiva en A, es decir, $\langle A,r\rangle$ es un conjunto con orden reflexivo, entonces $\langle A,r'\rangle$, con $r' = r \setminus \{\langle a,a\rangle : a \in A\}$, es un orden parcial;
   (v) si $\langle A,r\rangle$ es un orden parcial, entonces $r' = r \cup \{\langle a,a\rangle : a \in A\}$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva, es decir, $\langle A,r'\rangle$ es un conjunto con orden reflexivo.

10. Sea A un conjunto y r una relación binaria sobre A. Demuestre lo siguiente:

(i) si $\langle A,r\rangle$ es buen orden, entonces es orden total;
(iii) si $\langle A,r\rangle$ es buen orden, entonces es cobf;
(ii) si $\langle A,r\rangle$ es buen orden, entonces es coif;
(v) si $\langle A,r\rangle$ es orden total y coif, entonces es buen orden;
(iv) si $\langle A,r\rangle$ es orden total y cobf, entonces es buen orden;
(vi) $\langle A,r\rangle$ es cobf si y sólo si $\langle A,r\rangle$ es coif.

11. Sea A un conjunto y r una relación binaria sobre A. Demuestre que si $\langle A,r\rangle$ es buen orden y B es un subconjunto de A, entonces $\langle B, r\restriction_B\rangle$ es buen orden.

12. Sea A un conjunto. Demuestre que:
   (i) $\langle \mathcal{P}(A), \subsetneq\rangle$ es un orden parcial;
   (ii) $\langle \mathcal{P}(A), \subsetneq\rangle$ es orden total si y sólo si A tiene a lo más un elemento.

13. Sea r una relación binaria. Demuestre que:

(i) $\forall A,B(A \subseteq B \Rightarrow r[A] \subseteq r[B])$;
(ii) $\forall A,B\,(r[A\cup B] = r[A] \cup r[B])$;
(iii) $\forall A,B\,(r[A\cap B] \subseteq r[A] \cap r[B])$;
(iv) $\forall A,B\,(r[A] \setminus r[B] \subseteq r[A \setminus B])$;
(v) $\forall A,B\,(A \subseteq B \Rightarrow r^{-1}[A] \subseteq r^{-1}[B])$;
(vi) $\forall A,B\,(r^{-1}[A\cup B] = r^{-1}[A] \cup r^{-1}[B])$;
(vii) $\forall A,B\,(r^{-1}[A\cap B] \subseteq r^{-1}[A] \cap r^{-1}[B])$;
(viii) $\forall A,B\,(r^{-1}[A] \setminus r^{-1}[B] \subseteq r^{-1}[A \setminus B])$;
(ix) $\forall A\,(r[\bigcup A] = \bigcup\{r[a] : a \in A\})$;
(x) $\forall A \neq \varnothing\,(r[\bigcap A] \subseteq \bigcap\{r[a] : a \in A\})$;
(xi) $\forall A\,(r^{-1}[\bigcup A] = \bigcup\{r^{-1}[a] : a \in A\})$;
(xii) $\forall A \neq \varnothing\,(r^{-1}[\bigcap A] \subseteq \bigcap\{r^{-1}[a] : a \in A\})$;
(xiii) $\forall A\,(A \cap dom(r) \subseteq r^{-1}[r[A]])$;
(xiv) $\forall A\,(A \cap im(r) \subseteq r[r^{-1}[A]])$.

14. Diga si las contenciones de los incisos (iii), (iv), (vii), (viii), (x), (xii), (xiii) y (xiv) del ejercicio anterior se pueden cambiar por igualdades, justificando con prueba o contrajemplo. En caso de encontrar un contraejemplo para algún inciso, diga si la igualdad se cumple pidiendo que r sea función o que r sea función inyectiva y/o sobre, justificando cada hecho con una prueba o un contraejemplo.

15. Diga si los recíprocos de las implicaciones de los incisos (i) y (v) del ejercicio 13 son verdaderos, justificando con prueba o contraejemplo. En caso de encontrar un contraejemplo, diga si el recíproco se cumple pidiendo que r sea función o que r sea función inyectiva, justificando con una prueba o un contraejemplo.

16. Sea X un conjunto cualquiera. Demuestre que $f = \{(x,A) \in X \times \mathcal{P}(X) : x \in A\}$ es función si y sólo si $X = \varnothing$ o $X = \{x\}$.

17. Sea A un conjunto.
   (i) Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre A. Demuestre que el conjunto cociente $A/\sim$ es una partición de A.
   (ii) Sea P una partición de A. Demuestre que existe una relación de equivalencia $\sim_P$ sobre A de tal forma que $A/\sim_P$ es igual a P.
   (iii) Sea R el conjunto de todas las relaciones de equivalencia sobre A y sea P el conjunto de todas las particiones del conjunto A. Dé una función biyectiva $F : R \to P$, justificando su respuesta.

18. (i) Dé un ejemplo de una función f y un conjunto A tal que $f \cap A^2 \neq f \restriction_A$.
    (ii) Diga qué condición se debe cumplir para que $f \cap A^2 = f \restriction_A$

19. Sean f, g y h funciones cualesquiera. Demuestre lo siguiente:
    (i) $\forall A \subseteq dom(f)(A = \varnothing \Leftrightarrow f[A] = \varnothing)$;
    (ii) $f^{-1}[\varnothing] = \varnothing$;
    (iii) $\forall x \in dom(f)\ (f[\{x\}] = \{f(x)\})$;
    (iv) $g \circ f$ es función, y $dom(g \circ f) = dom(f) \cap f^{-1}[dom(g)]$;
    (v) $im(f) \subseteq dom(g) \Rightarrow dom(g \circ f) = dom(f)$;
    (vi) $\forall A\ (g \circ f[A] = g[f[A]])$;
    (vii) $\forall A\ ((g \circ f)^{-1}[A] = f^{-1}[g[-1[A]])$;
    (viii) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

20. Sea f una función cualquiera.
    (i) Demuestre lo siguiente:
        (a) si f es invertible, entonces $f^{-1} \circ f = Id_{dom(f)}$ y $f \circ f^{-1} = Id_{im(f)}$;
        (b) si existe una función g tal que $g \circ f = Id_{dom(f)}$, entonces f es invertible y $f^{-1} = g \restriction_{im(f)}$;
    (ii) Encuentre un contraejemplo para la siguiente afirmación: si existe una función h tal que $f \circ h = Id_{im(f)}$, entonces f es invertible.

21. Sean f y g funciones inyectivas. Demuestre que:
    (i) $g \circ f$ es inyectiva y, por tanto, invertible; y que
    (ii) $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

22. Sea $f : X \to Y$ una función y supóngase que $X \neq \varnothing$. Demuestre la equivalencia de las siguientes afirmaciones:
    (a) f es inyectiva;
    (b) existe $g : Y \to X$ tal que $g \circ f = Id_X$;
    (c) para cualquier conjunto Z y cualesquiera $h : Z \to X$ y $k : Z \to X$, $f \circ h = f \circ k$ implica que $h = k$;
    (d) $\forall A \subseteq X\ (f^{-1}[f[A]] = A)$;
    (e) $\forall A, B\ ((A \subseteq X \wedge B \subseteq X) \Rightarrow f[B \setminus A] = f[B] \setminus f[A])$;
    (f) $\forall A, B\ ((A \subseteq X \wedge B \subseteq X) \Rightarrow f[A \cap B] = f[A] \cap f[B])$.

23. Sea $f : X \to Y$ una función. Demuestre la equivalencia de las siguientes afirmaciones:
    (a) f es sobre Y;
    (b) $\forall A \subseteq Y\ (A \neq \varnothing \Rightarrow f^{-1}[A] \neq \varnothing)$;
    (c) $\forall A \subseteq Y\ (f[f^{-1}[A]] = A)$;
    (d) para cualquier conjunto Z y cualesquiera $h : Y \to Z$ y $k : Y \to Z$, $h \circ f = k \circ f$ implica que $h = k$.

24. Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$. Demuestre que si f es sobre Y y g es sobre Z, entonces $g \circ f$ es sobre Z.

25. (i) Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones cualesquiera. Demuestre que si $g \circ f : A \to C$ es biyectiva, entonces f es inyectiva y g es sobre C.
    (ii) Dé un ejemplo de una función $f : A \to B$ y una función $g : B \to C$ de forma que $g \circ f : A \to C$ sea biyectiva, pero f no sea sobre B y g no sea inyectiva.
    (iii) Dé un ejemplo de una función $f : A \to B$ que no sea inyectiva y una función $g : B \to C$ que no sea sobre C de forma que $g \circ f : A \to C$ no sea ni inyectiva ni sobre C.

26. Construya ejemplos de funciones que tengan inversa derecha y no tengan inversa izquierda, y viceversa. Dé un ejemplo de una función que tenga más de una inversa derecha. Dé un ejemplo de una función que tenga más de una inversa izquierda. (Recuerde que ya demostramos en clase que si $f : A \to B$ tiene inversa derecha e inversa izquierda, entonces es biyectiva.)

27. Sean $\langle A, r \rangle$ y $\langle B, r' \rangle$ conjuntos con tricotomía y sea $f : A \to B$. Supóngase que $\forall x, y \in A(\langle x, y \rangle \in r \Rightarrow \langle f(x), f(y) \rangle \in r')$. Demuestre que:
    (i) f es inyectiva;
    (ii) $\forall x, y \in A(\langle x, y \rangle \in r \Leftrightarrow \langle f(x), f(y) \rangle \in r')$.

28. Sea $f : X \to Y$. Demuestre que f es biyectiva si y sólo si $\forall A \subseteq X(Y \setminus f[A] = f[X \setminus A])$.