Tarea II del Seminario de Álgebra A

Semestre 2015-II

17 de marzo de 2015

Profra: Gabriela Campero Arena Ayud: Manuel Alejandro Zúñiga Pérez

1. Dé cuatro ejemplos de propiedades básicas en conjuntos tales que hay modelos transitivos M de ZF tales que sus fórmulas *no* son M-absolutas y explique por qué sucede esto.
2. Muestre que la composición de funciones Δ_0 no es necesariamente una función Δ_0.

   Sugerencia: Considere la función F tal que, si $n \in \omega$, entonces $F(n) = n + n$, y $F(x) = \varnothing$ en otro caso. Pruebe que F puede verse como la composición de dos funciones Δ_0 y, sin embargo, no es Δ_0.
3. Demuestre que $ZF^- - P - Inf$ no puede tener un modelo finito.
4. Definimos, por recursión ordinal, los conjuntos $\mathcal{H}_\alpha$ de la forma siguiente:

   (i) $\mathcal{H}_0 = \varnothing$,

   (ii) $\mathcal{H}_{\alpha+1} = [\mathcal{H}_\alpha]^{<\omega}$,

   (iii) Si γ es ordinal límite, $\mathcal{H}_\gamma = \bigcup\{\mathcal{H}_\beta : \beta < \gamma\}$.

   Pruebe que los conjuntos $\mathcal{H}_\alpha$ forman una jerarquía acumulativa.
5. (i) Sea M un modelo numerable y transitivo de ZFE. Pruebe que la operación potencia *no* es absoluta para M.

   (ii) Pruebe que, para cada ordinal límite α, se tiene que la operación potencia es absoluta para BF_α.
6. (i) Asuma ZFE. Sea κ un cardinal fuertemente inaccesible. Demuestre que las siguientes propiedades y funciones son absolutas para BF_κ

   (a) $\mathcal{P}(x)$,
   (b) ω_α,
   (c) $\beth_\alpha$,
   (d) BF_α,
   (e) $cf(\alpha)$,
   (f) α es fuertemente inaccesible.

   (ii) Asuma ZFE. Pruebe que si κ es un cardinal fuertemente inaccesible, entonces BF_κ es un modelo de ZFE.

   (iii) Pruebe que si ZFE tiene un modelo, entonces $ZFE+$"no existen cardinales fuertemente inaccesibles" también lo tiene.

   Sugerencia: Defina $M = \{x : \forall\alpha \in OR(\text{“}\alpha \text{ es fuertemente inaccesible”} \implies x \in BF_\alpha)\}$. Pruebe que M es el modelo requerido. Habrá que considerar los casos $M = V$ y $M \neq V$; para el segundo caso utilice el inciso anterior.
7. Pruebe que, si $\varphi_0, ..., \varphi_n$ es una lista finita de axiomas de ZFE, entonces

   $$ZF \vdash \exists M[M \text{ es transitivo } \wedge (\bigwedge_{i=0}^{n} \varphi_i)^M \wedge |M| = \aleph_0].$$

   Explique por qué esto no contradice al Teorema de Incompletud de Gödel.
8. Suponga que M es una clase trasitiva que satisface el axioma de Separación y para la cual se cumple que $\forall x \subseteq M \exists y \in M(x \subseteq y)$. Pruebe que M es un modelo de ZF.
9. Pruebe que existe una conjunción finita ϕ de axiomas de ZF tal que, siempre que M es una clase propia transitiva que satisface ϕ, M satisface todos los axiomas de ZF. Explique por qué esto no contradice el hecho de que ZF no es finitamente axiomatizable.

   *Sugerencia:*Use el teorema de Reflexión sobre los conjuntos $M \cap BF_\alpha$.

10. Sea $\mathfrak{L}$ un lenguaje y sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ estructuras para $\mathfrak{L}$ tales que $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Demuestre que son equivalentes:

    (i) $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$

    (ii) Para cada fórmula existencial φ (entonces φ es de la forma $\exists y \psi(x, y)$) de $\mathfrak{L}$ y cada $a \in A$, si $\mathfrak{B} \models \varphi[a]$, entonces existe $b \in A$ tal que $\mathfrak{B} \models \psi(a, b)$.

11. Asuma ZFE^-. Sea $\gamma > \omega_1$ ordinal límite. Demuestre que existen M numerable y transitivo y α y β ordinales en M tales que $M \equiv BF_\gamma$, $(\alpha \approx \beta)^M$ es falso, pero $(\alpha \approx \beta)^{BF_\gamma}$ es verdadero.

    Sugerencia: Utilice el teorema de Löwenheim-Skolem para hallar un submodelo elemental numerable de BF_γ que tenga como elementos a ω y ω_1. Aplique entonces el teorema del colapso de Mostowski a tal modelo y busque como elegir α y β apropiados en el mismo.

12. Suponga que $ZFE \vdash \exists\gamma[BF_\gamma \models ZFE]$. Demuestre *directamente* que ZFE es inconsistente.

13. Asuma ZFE. Sea κ un cardinal regular no numerable y un conjunto $\{A(\zeta) : \zeta \leqslant \kappa\}$ de conjuntos tales que:

    (i) $\forall\alpha, \beta \leqslant \kappa(\alpha < \beta \implies A(\alpha) \subseteq A(\beta))$,

    (ii) Si $\eta \leqslant \kappa$ es límite, entonces $A(\eta) = \bigcup\{A(\zeta) : \zeta < \eta\}$,

    (iii) $\forall\alpha < \kappa(|A(\alpha)| < \kappa)$ y $|A(\alpha)| = \kappa$.

    Entonces, para cada $\zeta < \kappa$ existe un ordinal límite $\eta < \kappa$ mayor que η tal que $A(\eta) \neq \varnothing$ y $A(\eta) \preceq A(\kappa)$.

    Sugerencia: Modifique la prueba del teorema de Reflexión, reemplazando a OR por κ y a Z por $A(\kappa)$, y considere una enumeración de las fórmulas que *no* involucran al cuantificador universal.

14. Asuma ZFE y suponga que existe un ordinal γ tal que $BF_\gamma \models ZFE$. Demuestre que el mínimo γ tal tiene cofinalidad numerable.

    *Sugerencia:*Aplique el ejercicio anterior de forma que, para cada γ de cofinalidad no numerable tal que $BF_\gamma \models ZFE$, pueda obtener $\eta < \gamma$ tal que $BF_\eta \models ZFE$.

15. Sean $\varphi_0, ..., \varphi_n$ axiomas de cualquier extensión S de ZFE. Demuestre que

$$S \vdash \exists M[M \text{ es transitivo } \wedge (\bigwedge_{i=0}^{n} \varphi_i)^M \wedge |M| = \aleph_0].$$

    Ejemplos de tal extensión de ZFE pueden ser $ZFE + HGC$ y $ZFE + V = L$ o con las respectivas negaciones de los enunciados extra.

16. Demuestre que para cualquier conjunto A y cualquier $n \in \omega$ se tiene que $\varnothing \in D(A, n + 1)$.

17. Pruebe que para todo $n \in \omega$ y todo A, $Df(A, n) = \{En(m, A, n) : m \in \omega\}$.

18. (i) Pruebe que $ZF \vdash \forall x((x \subseteq A \wedge |x| < \omega) \to x \in D(A))$.

    (ii) Diga cual es el error en la siguiente "demostración"del inciso anterior:
    Si $x \subseteq A$ y $|x| < \omega$, entonces $x = \{a_0, ..., a_{n-1}\}$. Considere la fórmula $\phi(x_0, ..., x_{n-1}, y)$ dada por $\bigvee_{i<n}(y = x_i)$. Por tanto, $x = \{y \in A : \phi^A(x_0, ..., x_{n-1}, y)\} \in D(A)$.

19. Demuestre directamente que L es un modelo de los axiomas de Par, Unión y Potencia, especificando claramente donde hace uso de que tal axioma es cierto en V.

20. Suponiendo que $\ll_\alpha$ es un buen orden para L_α, demuestre que el orden $\ll_\alpha^n$ es un buen orden para L_α^n.

21. Pruebe que si α es un punto fijo del funcional álef, entonces $(L_\alpha = BF_\alpha)^{V=L}$.

22. Utilice el axioma de elección para demostrar que, para $\alpha > \omega$, se tiene que $|L_\alpha| = |BF_\alpha|$ si y sólo si α es un punto fijo del funcional beth.

23. (i) Sean $x, y \in L$. Calcule explícitamente $\rho_L(\bigcup x), \rho_L(\{x\}), \rho_L(x \times y), \rho_L(\{x, y\})$ y $\rho_L((x, y))$ en términos de $\rho_L(x)$ y $\rho_L(y)$.
    (ii) Demuestre que $\mathbb{Z}, \mathbb{Q} \in L_{\omega+\omega}$.
    (iii) Demuestre que $\mathbb{R}^L = \mathbb{R} \cap L$ y que $\rho(\mathbb{R}^L) = \omega_1^L$.

24. Utilice el ejercicio 8 para dar una nueva demostración de que L es modelo de ZF.

25. Asumiendo AE, demuestre que si κ es cardinal débilmente inaccesible, entonces κ es un cardinal fuertemente inaccesible en L y $L_\kappa \models ZFE + V = L$.

26. Sea A un conjunto cualquiera. Definimos, por recursión ordinal, los conjuntos $L_\alpha(A)$ como sigue:
    (a) $L_0(A) = \{A\} \cup ct(A)$,
    (b) $L_{\alpha+1}(A) = D(L_\alpha(A))$,
    (c) Si γ es ordinal límite, $L_\gamma(A) = \bigcup\{L_\beta(A) : \beta < \gamma\}$.

    Definimos ahora $L(A) = \bigcup\{L_\alpha(A) : \alpha \in OR\}$. Demuestre lo siguiente:
    (i) $L(A)$ es la mínima clase *propia* transitiva que es modelo de ZF y que contiene a A.
    (ii) El axioma de Elección es válido en $L(A)$ si y sólo si $ct(A)$ es bien ordenable en $L(A)$.
    (iii) Si $A \subseteq \omega_1$, entonces $L(A) \models HGC$.