Tarea II de Álgebra Lineal I

Semestre 2020-I

26 de agosto de 2019

Profra: Gabriela Campero Arena Ayudtes: Yanh Vissuet, Mariana Garduño y Carlos Ochoa

1. Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, dando prueba o contraejemplo:
   (i) En cualquier espacio vectorial V, el vector cero es una combinación lineal de cualquier subconjunto no vacío de vectores de V.
   (ii) Resolviendo un sistema de ecuaciones, está permitido multiplicar una de las ecuaciones por cualquier constante.
   (iii) Todo sistema de ecuaciones tiene solución.

2. (i) Para cada uno de los siguientes grupos de vectores en $P(\mathbb{R})$, determine si el primero se puede expresar como combinación lineal de los otros dos.
   (a) $x^3-3x+5,\ x^3+2x^2-x+1,\ x^3+3x^2-1$;
   (b) $4x^3+2x^2-6,\ x^3-2x^2+4x+1,\ 3x^3-6x^2+x+4$;
   (c) $-2x^3-11x^2+3x+2,\ x^3-2x^2+3x-1,\ 2x^3+x^2+3x-2$;
   (d) $x^3+x^2+2x+13,\ 2x^3-3x^2+4x+1,\ x^3-x^2+2x+3$.
   (ii) Diga si los conjuntos de polinomios de los incisos anteriores son linealmente dependientes o linealmente independientes, justificando su respuesta. ¿Es cierto que si en el inciso (i) se pudo escribir el primer polinomio como combinación lineal de los otros dos, entonces son linealmente dependientes? ¿Es cierto que si no se pudo, entonces son linealmente independientes?

3. En cada uno de los siguientes incisos, diga si el vector v está en $\langle S\rangle$.
   (i) $v=(2,-1,1)$ y $S=\{(1,0,2),(-1,1,1)\}\subseteq\mathbb{R}^3$;
   (ii) $v=-x^3+2x^2+3x+3$ y $S=\{x^3+x^2-x-1,x^2+x+1,x+1\}\subseteq P_3(\mathbb{R})$;
   (iii) $v=\begin{pmatrix}1&2\\-3&4\end{pmatrix}$ y $S=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\right\}$.

4. Sea F un campo. Demuestre que si $M_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $M_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ y $M_3=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, entonces el subespacio de $M_{2\times 2}(F)$ generado por $\{M_1,M_2,M_3\}$ es el conjunto de todas las matrices simétricas de 2×2.

5. Sea V un espacio vectorial y $W\subseteq V$. Demuestre que W es un subespacio de V si y solo si $\langle W\rangle=W$.

6. Sea V un espacio vectorial y sean S_1 y S_2 subconjuntos de V. Demuestre que si $S_1\subseteq S_2$ entonces $\langle S_1\rangle\subseteq\langle S_2\rangle$. En particular, si $S_1\subseteq S_2$ y $\langle S_1\rangle=V$ entonces $\langle S_2\rangle=V$. Dé un ejemplo de un espacio vectorial V y subconjuntos distintos $S_1,S_2\subseteq V$ tales que $\langle S_1\rangle=\langle S_2\rangle$.

7. Sea V un espacio vectorial y sean S_1 y S_2 subconjuntos de V. Demuestre que $\langle S_1\cup S_2\rangle=\langle S_1\rangle+\langle S_2\rangle$.

8. Sean S_1 y S_2 subconjuntos de un espacio vectorial V. Demuestre que $\langle S_1\cap S_2\rangle\subseteq\langle S_1\rangle\cap\langle S_2\rangle$. Dé un ejemplo en el cual $\langle S_1\cap S_2\rangle$ y $\langle S_1\rangle\cap\langle S_2\rangle$ sean iguales y un ejemplo donde sean distintos.

9. Sea V un espacio vectorial. Demuestre que la intersección de todos los subespacios que contienen a S es $\langle S\rangle$.

10. Sea F un campo de característica 0 y sea V un espacio vectorial sobre F. Sea W un subespacio de V, ¿qué condiciones se deben de cumplir para que sólo haya un número finito de subconjuntos distintos S de W tales que $\langle S\rangle=W$? Justifique su respuesta.

11. Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, dando prueba o contraejemplo:
    (i) Si S es un conjunto finito linealmente dependiente, entonces cada vector de S puede escribirse como combinación lineal de los otros vectores en S.
    (ii) Cualquier conjunto que tenga al vector cero es linealmente dependiente.
    (iii) El conjunto vacío es linealmente dependiente.
    (iv) Sean $a_1,...,a_n\in F$ y $x_1,x_2,...,x_n\in V$. Si $a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n=\overline{0}$ y $x_1,x_2,...,x_n$ son linealmente independientes, entonces todos los escalares a_i son 0.

12. Diga si los siguientes subconjuntos son linealmente dependientes o linealmente independientes, justificando su respuesta.
    (i) $S=\{x^3+2x^2,-x^2+3x+1,x^3-x^2+2x-1\}$ en el espacio $P_3(\mathbb{R})$;
    (ii) $S=\{(1,-1,2),(1,-2,1)(1,1,4)\}$ en el espacio $\mathbb{R}^3$;
    (iii) $S=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&1\\0&1\end{pmatrix}\right\}$ en el espacio $M_{2\times 3}(F)$ con F cualquier campo.

13. En este ejercicio se ve cómo la característica del campo afecta la independencia lineal.
    Sea $S=\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ un subconjunto del espacio F^3.
    (i) Demuestre que si $F=\mathbb{R}$, entonces S es linealmente independiente.
    (ii) Demuestre que si F es un campo de característica 2, entonces S es linealmente dependiente.

14. Sea V un espacio vectorial y sean S_1 y S_2 subconjuntos de V. Demuestre lo siguiente:

    (i) Si S_1 es linealmente dependiente y $S_1 \subseteq S_2$, entonces S_2 es linealmente dependiente.

    (ii) Si S_2 es linealmente independiente y $S_1 \subseteq S_2$, entonces S_1 es linealmente independiente.

15. Sea V un espacio vectorial sobre un campo F.

    (i) Sean u y v vectores distintos de V. Demuestre que el conjunto $\{u, v\}$ es linealmente independiente si y sólo si para cualesquiera $a, b \in F \setminus \{0\}$, el conjunto $\{au, bv\}$ es linealmente independiente.

    (ii) Supóngase que F es de característica distinta de 2. Sean u y v vectores distintos de V. Demuestre que el conjunto $\{u, v\}$ es linealmente independiente si y sólo si el conjunto $\{u + v, u - v\}$ es linealmente independiente.

    (iii) Supóngase que F es de característica distinta de 2. Sean u, v y w vectores distintos de V. Demuestre que el conjunto $\{u, v, w\}$ es linealmente independiente si y sólo si el conjunto $\{u + v, u + w, v + w\}$ es linealmente independiente.

16. Sean $u, v \in V$. ¿Para qué valores de $a \in F$ la independencia lineal de $\{u, v\}$ garantiza la independencia lineal de $\{au + v, u + av\}$? Justifique su respuesta.

17. Demuestre las siguientes caracterizaciones de dependencia lineal.

    (i) S es linealmente dependiente si y sólo si $S = \{\overline{0}\}$ o existen vectores distintos $v, u_1, u_2, ..., u_n$ en S, con $n \geq 1$, tales que v es una combinación lineal de $u_1, u_2, ..., u_n$.

    (ii) Sea $S = \{u_1, u_2, ...u_n\}$ un conjunto finito de vectores distintos de V. Entonces S es linealmente dependiente si y sólo si $u_1 = \overline{0}$ o $u_{k+1} \in \langle\{u_1, u_2, ...u_k\}\rangle$ para algún k con $1 \leq k < n$.

18. Demuestre que un conjunto de vectores S es linealmente independiente si y sólo si todo subconjunto finito de S es linealmente independiente.

19. Demuestre que los siguientes subconjuntos de vectores del espacio $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ son linealmente independientes.

    (i) $\{f(t) = e^{rt}, g(t) = e^{st}\}$, donde $r, s \in \mathbb{R}$ y $r \neq s$;

    (ii) $\{f(x) = \sin(x), g(x) = \cos(x)\}$; y

    (iii) $\{f(x) = \cos(nx), g(x) = \cos(mx)\}$, donde $n, m \in \mathbb{N}^+$ y $n \neq m$.

20. Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, dando prueba o contraejemplo.

    (i) Todo espacio vectorial tiene una base finita.

    (ii) Un espacio vectorial no puede tener más de una base.

    (iii) Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Sea S_1 un subconjunto linealmente independiente de vectores de V y sea S_2 un subconjunto de V que lo genera. Entonces S_1 no puede tener más vectores que los que tiene S_2.

    (iv) Sea V un espacio vectorial. Si $\langle S\rangle = V$, entonces cada vector de V se puede escribir de manera única como combinación lineal de vectores en S.

    (v) Si V es un espacio vectorial de dimensión n, entonces V tiene exactamente un subespacio de dimensión 0 y exactamente un subespacio de dimensión n.

    (vi) Sea V un espacio vectorial de dimensión n. Si S es un subconjunto con n vectores de V, entonces S es linealmente independiente si y sólo si $\langle S\rangle = V$.

21. Demuestre que los siguientes conjuntos β son bases de los espacios vectoriales V. A estas bases se les llama las bases canónicas de los espacios vectoriales dados.

    (i) $V = F^n$ para cualquier campo F, y $\beta = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$, donde e_j es el vector tal que su j-ésima coordenada es 1 y el resto de sus coordenadas son 0;

    (ii) $V = M_{m\times n}(F)$ para cualquier campo F y cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}^+$, y $\beta = \{E^{ij} : 1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n\}$, donde E^{ij} es la matriz tal que la entrada correspondiente al i-ésimo renglón y la j-ésima columna es 1 y las demás entradas son 0;

    (iii) $V = P_n(F)$ para cualquier campo F, y $\beta = \{1, x, x^2, ..., x^n\}$.

22. Diga si los siguientes conjuntos S son bases del espacio V, justificando su respuesta, y si no lo son, reduzca o aumente el conjunto para dar una base del espacio V.

    (i) $S = \{(1, -3, -2), (-3, 1, 3), (-2, -10, -2)\}$ y $V = \mathbb{R}^3$;

    (ii) $S = \{-1 + 2x + 4x^2, 3 - 4x - 10x^2, -2 - 5x - 6x^2\}$, y $V = P_2(\mathbb{R})$;

    (iii) $S = \{(2, -3, 1), (1, 4, -2), (-8, 12, -4), (1, 37, -17), (-3, -5, 8)\}$, y $V = \mathbb{R}^3$;

    (iv) $S = \{(2, -3, 4, -5, 2), (-1, 1, 2, 1, -3), (3, -2, 7, -9, 1), (2, -8, 2, -2, 6), (-6, 9, -12, 15, -6), (0, -3, -18, 9, 12), (1, 0, -2, 3, -2), (2, -1, 1, -9, 7)\}$ y $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 0\}$.

23. Sea F un campo cualquiera. Dada la base $\beta = \{(1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)\}$ de F^4, encuentre la representación única de un vector $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in F^4$ como combinación lineal de los elementos de β.

24. Conteste las siguientes preguntas, justificando su respuesta:

    (i) ¿El conjunto $\{x^3 - 2x^2 + 1, 4x^2 - x + 3, 3x - 2\}$ genera a $P_3(\mathbb{R})$?

    (ii) ¿El conjunto $\{(1, 4, -6), (1, 5, 8), (2, 1, 1), (0, 1, 0)\}$ es un subconjunto linealmente independiente de $\mathbb{R}^3$?

25. Sean

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \in V : a,b,c \in F \right\} \text{ y}$$

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & b \end{pmatrix} \in V : a,b \in F \right\}$$

subconjuntos del espacio vectorial $M_{2\times 2}(F)$. Demuestre que W_1 y W_2 son subespacios vectoriales de V y encuentre las dimensiones de W_1, W_2, $W_1 + W_2$ y $W_1 \cap W_2$. *Sugerencia:* No se tienen que dar bases para todos estos subespacios.

26. Sea F un campo cualquiera. Sabemos que el conjunto W de todas las matrices de $n \times n$ con traza cero es un subespacio de $M_{n\times n}(F)$. Encuentre una base para W. ¿Cuál es la dimensión de W?

27. Sea F un campo cualquiera. Sabemos que el conjunto W de todas las matrices antisimétricas de $n \times n$ es un subespacio de $M_{n\times n}(F)$. (Una matriz $A \in M_{n\times n}(F)$ es antisimétrica sii $-A = A^t$.) Encuentre una base para W. ¿Cuál es la dimensión de W?

28. Supongamos que V es una espacio vectorial con dimensión n y sea $S \subseteq V$ tal que $\langle S \rangle = V$.

   (i) Demuestre que existe un subconjunto $\beta \subseteq S$ tal que β es base de V. (*Tenga cuidado de no suponer que S es finito.*)

   (ii) Demuestre que S tiene al menos n vectores.

29. Sean W_1 y W_2 subespacios de un espacio vectorial de dimensión finita. Diga cuáles son las condiciones suficientes y necesarias que deben cumplir W_1 y W_2 para que $dim(W_1 \cap W_2) = dim(W_1)$, justificando su respuesta.

30. Sea F un campo cualquiera y sean V y W dos espacios vectoriales sobre el campo F, donde $+_V$ es la suma vectorial en V y $\cdot_V$ es la multiplicación escalar en V, y $+_W$ es la suma vectorial en W y $\cdot_W$ es la multiplicación escalar en W. Recuerde la definición del espacio vectorial $Z = \{(v,w) : v \in V \text{ y } w \in W\}$, donde para $(v_1, w_1), (v_2, w_2) \in Z$ y $c \in F$, definimos las operaciones de suma y multiplicación escalar de la siguiente manera:
$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 +_V v_2, w_1 +_W w_2)$,
$c(v_1, w_1) = (c \cdot_V v_1, c \cdot_W w_1)$.
Si V y W tienen dimensiones $m \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}$, respectivamente, diga cuál es la dimensión de Z, justificando su respuesta.

31. Sea $a \in \mathbb{R}$ fijo. Determine la dimensión del subespacio $W = \{f(x) \in P_n(\mathbb{R}) : f(a) = 0\}$ de $P_n(\mathbb{R})$, justificando su respuesta.

32. (i) Demuestre que si W_1 y W_2 son dos subespacios de dimensión finita de un espacio vectorial V, entonces el subespacio $W_1 + W_2$ tiene dimensión finita y $dim(W_1 + W_2) = dim(W_1) + dim(W_2) - dim(W_1 \cap W_2)$. *Sugerencia:* Empiece con una base para $W_1 \cap W_2$ y extiéndala a dos bases, una para W_1 y otra para W_2.

   (ii) Sean W_1 y W_2 dos subespacios de dimensión finita de un espacio vectorial V tales que $V = W_1 + W_2$. Demuestre que $V = W_1 \oplus W_2$ si y sólo si $dim(V) = dim(W_1) + dim(W_2)$.

   (iii) Sean W_1 y W_2 subespacios vectoriales de V de dimensiones m y $n \in \mathbb{N}$ respectivamente, con $m \geq n$. Demuestre que $dim(W_1 \cap W_2) \leq n$ y que $dim(W_1 + W_2) \leq m + n$. Dé ejemplos donde se den las igualdades.

33. Sea V un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{C}$ de dimensión $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que si V' es el espacio vectorial V visto sobre el campo $\mathbb{R}$ (en la tarea anterior vimos que esto era posible), entonces V' tiene dimensión $2n$.

34. Sean W_1 y W_2 subespacios vectoriales de V.

   (i) Si $V = W_1 \oplus W_2$ y β_1 y β_2 son bases para W_1 y W_2 respectivamente, demuestre que $\beta_1 \cap \beta_2 = \varnothing$ y que $\beta_1 \cup \beta_2$ es base de V. Concluya que si V es de dimensión finita entonces $dim(V) = dim(W_1) + dim(W_2)$.

   (ii) Demuestre que si β_1 y β_2 son bases para W_1 y W_2 respectivamente tales que $\beta_1 \cap \beta_2 = \varnothing$ y $\beta_1 \cup \beta_2$ es base de V, entonces $V = W_1 \oplus W_2$.

35. Supóngase que V es un espacio vectorial de dimensión finita y que W_1 es un subespacio de V. Demuestre que existe un subespacio W_2 de V tal que $V = W_1 \oplus W_2$. ¿Es único dicho subespacio W_2? Justifique su respuesta.

36. Sea V un espacio vectorial sobre un campo F y sean W_1 y W_2 subespacios vectoriales de V. Demuestre que $V = W_1 \oplus W_2$ si y solo si W_1 es mínimo con la propiedad de que $W_1 + W_2 = V$, es decir, que $W_1 + W_2 = V$ y para cualquier subespacio W de V si $W \subsetneqq W_1$, se tiene que $W + W_2 \subsetneqq V$.

37. Sea V un espacio vectorial sobre un campo F y sean W_1 y W_2 subespacios vectoriales de V. Demuestre que $V = W_1 \oplus W_2$ si y solo si W_1 es máximo con la propiedad de que $W_1 \cap W_2 = \{\overline{0}\}$, es decir, que $W_1 \cap W_2 = \{\overline{0}\}$ y para cualquier subespacio W de V si $W_1 \subsetneqq W$ se tiene que $\{\overline{0}\} \subsetneqq W \cap W_2$.

38. Recuérdese del último ejercicio de la tarea anterior que dado un subespacio W de un espacio vectorial V sobre un campo F y dado $v \in V$, si definimos el conjunto $v + W = \{v + w : w \in W\}$ y el conjunto $S = \{v + W : v \in V\}$ junto con la suma $+_S$ en S y la multiplicación escalar $\cdot_S$ en S como: para cualesquiera $v_1, v_2 \in V$, $(v_1 + W) +_S (v_2 + W) = (v_1 + v_2) + W$, y para cualesquiera $v \in V$ y $a \in F$, $a \cdot_S (v + W) = (av) + W$, entonces las operaciones $+_S$ y $\cdot_S$ no dependen de los representantes y la estructura $(S, +_S, \cdot_S)$ es un espacio vectorial. Este espacio vectorial se denota como V/W y se llama *el espacio cociente de V módulo W*. Demuestre lo siguiente.

   (i) Sea W un subespacio de un espacio vectorial V de dimensión finita. Sea $\{u_1, u_2, ..., u_k\}$ una base para W. Sea $\{u_1, u_2, ..., u_k, u_{k+1}, ..., u_n\}$ una extensión de la base dada de W a una base de V. Demuestre que $\{u_{k+1} + W, u_{k+2} + W, ..., u_n + W\}$ es una base para el espacio V/W definido en el inciso anterior.

(ii) Sea W un subespacio de un espacio vectorial V de dimensión finita. Encuentre una fórmula que relacione $dim(V)$, $dim(W)$ y $dim(V/W)$, justificando su respuesta.

39. Demuestre que el conjunto de todas las sucesiones convergentes de números reales es un subespacio de dimensión infinita del espacio vectorial de todas las sucesiones de números reales.

40. Demuestre que un espacio vectorial es de dimensión finita si y sólo si no contiene subconjuntos infinitos linealmente independientes.

41. El espacio vectorial $\mathbb{R}$ claramente es de dimensión finita 1. Ahora, sea V el espacio vectorial de los números reales sobre el campo de los racionales. Demuestre que V es de dimensión infinita. *Sugerencia:* Use el hecho de que π es trascendental, es decir, que no es raíz de ningún polinomio con coeficientes en $\mathbb{Q}$.

42. Sea S un subconjunto (no necesariamente finito) de un espacio vectorial V sobre un campo F. Demuestre que S es linealmente independiente si y sólo si para cada vector no nulo $v \in \langle S \rangle$, existen $u_1, ..., u_n \in S$ únicos y $a_1, ..., a_n \in F$ también únicos tales que $v = a_1u_1 + ... + a_nu_n$. Esta afirmación es una generalización en dos sentidos del Teorema 1.8 visto en clase, ¿cuáles son estos dos sentidos?.

43. Sea V un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{Z}_2$ y sea $S = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ un subconjunto linealmente independiente de V. ¿Cuántos vectores hay en el conjunto $\langle S \rangle$? Justifique su respuesta.

$44^\star$. Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando su respuesta.

(i) Toda familia de conjuntos tiene un elemento maximal.

(ii) Toda cadena de conjuntos tiene un elemento maximal.

(iii) Si una familia de conjuntos tiene un elemento maximal, entonces ese elemento maximal es único.

(iv) Si una cadena de conjuntos tiene un elemento maximal, entonces ese elemento maximal es único.

(v) Una base de un espacio vectorial es un subconjunto maximal linealmente independiente de vectores del espacio.

(vi) Un subconjunto maximal linealmente independiente de vectores de un espacio vectorial es una base para el espacio vectorial.

$45^\star$. Sea W un subespacio de un espacio vectorial V (no necesariamente de dimensión finita). Demuestre que cualquier base para W es un subconjunto de una base para V.

$46^\star$. Demuestre la siguiente generalización del Teorema 1.9 visto en clase: Sean S_1 y S_2 subconjuntos de un espacio vectorial V tales que $S_1 \subseteq S_2$. Si S_1 es linealmente independiente y $\langle S_2 \rangle = V$, entonces existe una base β para V tal que $S_1 \subseteq \beta \subseteq S_2$. *Sugerencia:* Aplique el Lema de Zorn o Principio de Maximalidad a la familia de subconjuntos linealmente independientes de S_2 que contienen a S_1.

$47^\star$. Demuestre la siguiente generalización del Teorema del Reemplazo: Sea β una base de un espacio vectorial V y sea S un subconjunto linealmente independiente de V. Entonces existe un subconjunto S_1 de β tal que $S \cup S_1$ es una base para V.

$\star$ **Los ejercicios marcados con asterisco son por si les interesó suficiente la sección 1.7, sólo vendrán en el examen como puntos extras.**