Ejercicios para Examen I de Álgebra Superior I
Semestre 2020-I
7 de agosto de 2019

Profra: Gabriela Campero Arena Ayudtes: Manuel Zúñiga y Mariana Garduño

Los ejercicios que se pueden entregar a los ayudantes (no tienen que ser todos los de esta lista y es opcional entregarlos) son: 3(i), 3(v), 4(ii), 4(iii); del ejercicio 6 negar 2(i), 5(iii), 5(iv); 7(ii), 8(i), 9(iii), 11(ii), 11(v), 12(ii), 12(v), 13(i), 14(ii), 15(i), 15(iii), 16(i), 16(ii), 17(i). Para que los califiquen antes del examen hay que entregarlos a más tardar el — de agosto a las 5pm. El examen correspondiente es el — de agosto a las 2pm.

I. Lógica Proposicional

1. En un periódico aparece el siguiente párrafo: "El mexicano Juan René practica tiro con arco. Entrena arduamente en Jalisco. Está compitiendo en las Olimpiadas de Londres". Sean P, Q y R la primera, segunda y tercera de este párrafo respectivamente. Escriba en español las siguientes proposiciones (observe que las oraciones segunda y tercera no tienen sujeto, porque está implícito gracias a la primera oración).

   (i) $P \wedge Q$.

   (ii) $(\neg Q) \vee R$.

   (iii) $(P \wedge Q) \Rightarrow R$.

2. Haga las tablas de verdad de las siguientes proposiciones.

   (i) $((\neg P) \wedge Q) \Rightarrow R$

   (ii) $((\neg P) \wedge Q) \Leftrightarrow (P \vee (\neg Q))$

   (iii) $(\neg(P \vee Q)) \vee ((\neg P) \wedge Q)$.

3. Determine en cada caso si la información dada es suficiente para conocer el valor de verdad de las siguientes proposiciones compuestas.

   (i) $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$, sabiendo que R es verdadero.

   (ii) $((P \vee Q) \Leftrightarrow ((\neg P) \wedge (\neg Q))$, sabiendo que Q es verdadero.

   (iii) $(P \wedge Q) \Rightarrow (P \vee R)$, sabiendo que P es verdadero y Q es falso.

   (iv) $P \wedge (Q \Rightarrow R)$, sabiendo que $P \Rightarrow R$ es verdadero.

   (v) $((P \vee Q) \wedge (\neg Q)) \Rightarrow Q$, sabiendo que $P \vee Q$ es verdadero y Q es falso.

4. Diga si los siguientes pares de proposiciones son lógicamente equivalentes, justificando su respuesta.

   (i) $P \Rightarrow Q$ y $Q \Rightarrow P$.

   (ii) $P \Rightarrow Q$ y $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

   (iii) $(P \wedge Q) \Rightarrow R$ y $(P \wedge \neg R) \Rightarrow \neg Q$.

   (iv) $(P \vee R) \wedge (Q \vee \neg R)$ y $(R \wedge Q) \vee (\neg R \wedge P)$.

5. Diga si las siguientes proposiciones son leyes lógicas (tautologías) o si no lo son, justificando su repuesta.

   (i) $P \Rightarrow (P \vee Q)$.

   (ii) $P \Rightarrow (Q \Rightarrow (R \vee P))$.

   (iii) $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$.

   (iv) $(P \vee (P \wedge Q)) \Leftrightarrow P$.

6. Niegue las proposiciones del Ejercicio 2 y del Ejercicio 5, simplifíquelas de forma que cada símbolo de negación afecte a lo más a una letra, y calcule las tablas de verdad de las proposiciones negadas, comparándola con la tabla de verdad de la proposición original para revisar que sí haya negado correctamente.

7. Escriba las siguientes proposiciones en lenguaje proposicional de tal manera que las letras representen proposiciones que ya no pueden descomponerse, después niegue las traducciones de forma que cada símbolo de negación afecte a lo más a una letra y retradúzcalas al español:
   (i) Hay nubes, pero no llueve.
   (ii) Voy al cine contigo si llevas tu auto, pero no va tu mamá o tu hermano.
   (iii) Si llueve, habrá agua.

8. Diga si los siguientes son razonamientos deductivos válidos, justificando su respuesta (si el razonamiento no es válido, la manera de justificar la respuesta es dando un ejemplo en el que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa, es decir, dar un contraejemplo):

   (i) $$\begin{array}{c} P \vee \neg Q \\ (\neg Q) \Leftrightarrow R \\ P \vee \neg R \\ \hline P \end{array}$$

   (ii) $$\begin{array}{c} P \wedge Q \\ (P \wedge Q) \Rightarrow R \\ R \Rightarrow S \\ \hline S \end{array}$$

   (iii) $$\begin{array}{c} ((\neg P) \wedge Q) \Rightarrow R \\ (\neg R) \wedge S \\ \neg Q \\ \hline P \end{array}$$

   (iv) $$\begin{array}{c} P \vee \neg Q \\ \neg Q \Rightarrow R \\ \neg R \\ \hline P \end{array}$$

9. Diga si los siguientes son razonamientos deductivos válidos, justificando su respuesta.

   (i) $$\begin{array}{l} \text{Si los músicos no están interesados,} \\ \qquad\qquad \text{entonces no les preocupan los ensayos ni el público.} \\ \text{A los músicos les preocupan los ensayos o el público.} \\ \hline \text{Los músicos están interesados.} \end{array}$$

   (ii) $$\begin{array}{l} \text{Si } a{+}b \text{ es par y } b \text{ es par, entonces } a \text{ es par.} \\ \text{Ni } a \text{ ni } b \text{ es par.} \\ \hline a{+}b \text{ no es par.} \end{array}$$

   (iii) $$\begin{array}{l} \text{Si los alumnos no están interesados,} \\ \qquad\qquad \text{entonces no les preocupan las tareas.} \\ \text{Si a los alumnos les preocupan las tareas,} \\ \qquad\qquad \text{entonces van a clase y estudian.} \\ \text{Si los alumnos disfrutan las clases, entonces están interesados.} \\ \text{Los alumnos disfrutan las clases.} \\ \hline \text{Los alumnos estudian.} \end{array}$$

10. Demuestre que α es una tautología si y sólo si $\neg\alpha$ es una contradicción.

II. Lógica de predicados

11. Traduzca las siguientes proposiciones al lenguaje de lógica de predicados, después niegue las representaciones simbólicas de manera que cada símbolo de negación afecte a lo más a un predicado y retradúzcalas al español:
    (i) El cuadrado de todo número real es mayor que 2.
    (ii) Existen enteros cuyo cubo aumentado en 1 es igual al cubo del siguiente entero.
    (iii) Todo el que disfruta estudia.
    (iv) Algunos animales permanecen toda su vida en medios acuáticos.
    (v) Ningún estudiante carece de conocimientos.

12. Niegue las siguientes fórmulas de manera que cada símbolo de negación afecte a lo más un predicado:
    (i) $\exists x(P(x) \vee \neg Q(x))$.
    (ii) $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$.
    (iii) $\exists x(\neg P(x) \wedge Q(x))$.

(iv) $\forall x \exists y (x \cdot y = 0)$.

(v) $\exists x \forall y (x \leq y)$.

13. Diga si los siguientes razonamientos deductivos son válidos, justificando su respuesta.

(i) $$\begin{array}{l} \forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \\ \neg Q(a) \\ \hline \neg P(a) \end{array}$$

(ii) $$\begin{array}{l} \forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \\ Q(a) \\ \hline P(a) \end{array}$$

14. Diga si los siguientes razonamientos son válidos, justificando su respuesta:

(i)
Las cafeteras están hechas de oro.
Las cosas hechas de oro son máquinas de tiempo.
Las máquinas de tiempo sirven para viajar en el tiempo.
___
Las cafeteras sirven para viajar en el tiempo.

(ii)
Algunos senadores son personas corruptas.
Los senadores son políticos.
___
Algunas personas corruptas son políticos.

(iii)
Todos los trabajadores honestos son bien remunerados.
Ningún político es bien remunerado.
___
Ningún político es un trabajador honesto.

15. (i) Dé un ejemplo de una interpretación en la que $\forall x P(x)$ sea falso, pero $\exists x P(x)$ sea verdadero.
(ii) ¿Existe alguna interpretación en la que $\forall x P(x)$ sea verdadero y $\exists x P(x)$ sea falso? Justifique su respuesta.
(iii) ¿Existe alguna interpretación en la que $\forall x P(x)$ sea verdadero y $\neg \exists x P(x)$ sea verdadero? Justifique su respuesta.
(iv) ¿Será cierto que en toda interpretación que haga a $\neg \forall x P(x)$ verdadero se tiene que $\exists x \neg P(x)$ es verdadero? Justifique su respuesta.

16. (i) Dé un ejemplo de una interpretación en la que $\forall x \exists y Q(x, y)$ sea verdadero, pero $\exists y \forall x Q(x, y)$ sea falso.
(ii) ¿Existe alguna interpretación en la que $\forall x \exists y Q(x, y)$ sea falso y $\exists y \forall x Q(x, y)$ sea verdadero? Justifique su respuesta.
(iii) Dé un ejemplo de una interpretación en la que $\forall x \exists y Q(x, y)$ sea verdadero, pero $\forall y \exists x Q(x, y)$ sea falso.
(iv) ¿Existe alguna interpretación en la que $\forall x \exists y Q(x, y)$ sea falso y $\forall y \exists x Q(x, y)$ sea verdadero? Justifique su respuesta.

17. (i) ¿Existe alguna interpretación en la que $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$ sea verdadero, pero $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ sea falso?
(ii) ¿Existe alguna interpretación en la que $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$ sea falso, pero $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ sea verdadero?