Tarea I de Lógica Matemática I

Semestre 2016-1

11 de agosto de 2015

Profra: Gabriela Campero Arena — Ayud: Héctor Olvera Vital

1. Traduzca al lenguaje de la Lógica Proposicional los siguientes enunciados en español de forma que los símbolos de enunciado representen proposiciones atómicas (es decir, proposiciones que no se pueden dividir en otras proposiciones) especificando qué proposición representa cada símbolo de enunciado (o letra proposicional):
   (i) O bien la evidencia obtenida es admisible, o bien el sospechoso debe ser liberado, pero no ambas cosas.
   (ii) Este artículo constituye riqueza si y sólo si es transferible, de abastecimiento limitado, y produce placer o evita dolor.
   (iii) No habrá agua, a menos que llueva.
   (iv) Iré al cine contigo, si llevas tu auto, pero no va tu mamá o tu hermano.
2. Escriba tres enunciados en español junto con sus traducciones a la Lógica Proposicional. Escoja enunciados que tengan una estructura interesante y tales que cada traducción tenga al menos quince símbolos del lenguaje.
3. Diga si las siguientes expresiones son fórmulas (bien formadas), justificando su respuesta:
   (i) $((P\neg R)\wedge Q)$
   (ii) $((P\to(Q\to R))\to((P\to Q)\to(Q\to R)))$
   (iii) $(\neg(\neg P)\leftrightarrow Q)$
   (iv) $(P\leftrightarrow(R\vee S)\wedge\neg(\neg(P\to Q)))$
4. Demuestre que cualquier segmento inicial propio de una fórmula de la Lógica Proposicional tiene más paréntesis izquierdos que paréntesis derechos. Por lo tanto, según lo que demostramos en clase, ningún segmento incial propio de una fórmula es una fórmula.
5. Muestre que no hay fórmulas de longitud 2,3 ni 6, pero que cualquier otra longitud es posible.
6. Sea α una fórmula, sea c el número de lugares en los que aparecen conectivos binarios $(\wedge,\vee,\to,\leftrightarrow)$ en α y sea s el número de lugares en los que aparecen símbolos de enunciado en α. (Por ejemplo, si α es $(A\to(\neg A))$, entonces $c=1$ y $s=2$.) Usando el principio de inducción, pruebe que $s=c+1$.
7. Supóngase que α es una fórmula que no contiene el símbolo de negación $\neg$. Entonces
   (i) Demuestre que la longitud de α (es decir, el número de símbolos que aparecen en α) es impar.
   (ii) Demuestre que más de una cuarta parte de los símbolos son símbolos de enunciado.
   Sugerencia: Aplique inducción para mostrar que la longitud es de la forma $4k+1$ y el número de símbolos de enunciado es $k+1$.
8. Pruebe que la tabla de verdad de una fórmula con n símbolos de enunciado tiene 2^n renglones.
9. Determine en cada caso si la información dada es suficiente para conocer el valor de verdad de las siguientes proposiciones compuestas, justificando sus respuestas:
   (i) $((P\implies Q)\implies R)$; sabiendo que R es verdadero (V)
   (ii) $((P\vee Q)\iff((\neg P)\wedge(\neg Q)))$; sabiendo que Q es V
   (iii) $((P\wedge Q)\implies(P\vee R))$; sabiendo que P es V y R es falso (F)
   (iv) $(P\wedge(Q\implies R))$; sabiendo que $P\implies R$ es V
   (v) $(((P\vee Q)\wedge(\neg Q))\implies Q)$; sabiendo que $P\vee Q$ es V y Q es F.
10. Demuestre que $(P\vee Q)$ y $((\neg P)\to Q)$ son tautológicamente equivalentes y que $(P\wedge Q)$ y $(\neg(P\to(\neg Q)))$ son tautológicamente equivalentes.
11. Tome a 0 como el valor de verdad F y a 1 como el valor de verdad V, y recuerde las funciones de verdad dadas en clase para fórmulas compuestas en términos de sus componentes con estos valores de verdad:

    $\overline{v}((\neg\alpha))=1-\overline{v}(\alpha)$, $\quad\overline{v}((\alpha\wedge\beta))=\text{mín}\{\overline{v}(\alpha),\overline{v}(\beta)\}$,

    $\overline{v}((\alpha\vee\beta))=\text{máx}\{\overline{v}(\alpha),\overline{v}(\beta)\}$, $\quad\overline{v}((\alpha\to\beta))=1-\overline{v}(\alpha)+\overline{v}(\alpha)\overline{v}(\beta)$.

    Utilizando el problema anterior, obtenga funciones más sencillas para operar el valor de verdad de $\overline{v}((\alpha\vee\beta))$ y $\overline{v}((\alpha\wedge\beta))$ que las funciones máx y mín.
12. Sea $\alpha\fallingdotseq(\alpha_1\wedge(\alpha_2\wedge(\alpha_3\wedge(\alpha_4\wedge(\cdots\wedge(\alpha_{n-1}\wedge\alpha_n)\cdots)$, donde cada α_i es una fórmula. Tome a 0 como el valor de verdad F y a 1 como el valor de verdad V. Utilizando la función de verdad para $\wedge$ del ejercicio anterior, demuestre que $\overline{v}(\alpha)=\text{mín}\{\overline{v}(\alpha_i):1\leq i\leq n\}$. Además, utilizando su respuesta del ejercicio anterior, obtenga una función más sencilla para operar el valor de verdad de $\overline{v}(\alpha)$.
13. Determine si las siguientes fórmulas son tautologías:

(i) $(((A \to B) \to B) \to B)$

(ii) $(((A \to B) \to B) \to A)$

(iii) $(A \to (B \to (B \to A)))$

(iv) $((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \leftrightarrow (B \leftrightarrow A)))$

(v) $((A \vee (\neg(B \wedge C))) \to ((A \leftrightarrow C) \vee B))$

(vi) $((A \to B) \vee (B \to A))$

14. (i) ¿Es $(((P \to Q) \to P) \to P)$ una tautología?

    (ii) Defina σ_k recursivamente como sigue: $\sigma_0 \leftrightharpoons (P \to Q)$ y $\sigma_{k+1} \leftrightharpoons (\sigma_k \to P)$. ¿Para qué valores de k es σ_k una tautología?

15. ¿Cuáles de las siguientes fórmulas son implicadas tautológicamente por $(A \wedge B)$ y cuáles por $(A \vee B)$?

    (i) $(A \vee B)$

    (ii) $((\neg A) \vee B)$

    (iii) $(A \to B)$

    (iv) $(A \to (\neg B))$

    (v) $((\neg B) \to A)$

    (vi) $((A \to B) \vee (B \to A))$

16. De las siguientes tres fórmulas, ¿cuál implica tautológicamente a cuál?

    (i) $(A \leftrightarrow B)$,

    (ii) $(\neg((A \to B) \to (\neg(B \to A))))$,

    (iii) $(((\neg A) \vee B) \wedge (A \vee (\neg B)))$.

17. Muestre que ninguna de las siguientes dos fórmulas implica tautológicamente a la otra (no se necesita calcular las 8 asignaciones de verdad, 2 bastan):

$$(A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)) \qquad\qquad ((A \wedge (B \wedge C)) \vee ((\neg A) \wedge ((\neg B) \wedge (\neg C))))$$

18. Demuestre que φ y ψ son tautológicamente equivalentes si y sólo si las columnas de sus tablas de verdad son iguales.

19. Demuestre que φ y ψ son tautológicamente equivalentes si y sólo si $(\neg\varphi)$ y $(\neg\psi)$ son tautológicamente equivalentes.

20. Pruebe que se cumple lo siguiente para cualesquiera conjunto de fórmulas Σ y fórmulas α y β:

    (i) $\Sigma \cup \{\alpha\} \models \beta$ si y sólo si $\Sigma \models (\alpha \to \beta)$,

    (ii) $\alpha \models \beta$ y $\beta \models \alpha$ si y sólo si $\models (\alpha \leftrightarrow \beta)$.

21. Pruebe o refute cada una de las afirmaciones siguientes para cualesquiera conjunto de fórmulas Σ y fórmulas α y β:

    (i) Si $\Sigma \models \alpha$ o $\Sigma \models \beta$, entonces $\Sigma \models (\alpha \vee \beta)$.

    (ii) Si $\Sigma \models (\alpha \vee \beta)$, entonces $\Sigma \models \alpha$ o $\Sigma \models \beta$.

22. Sea H una letra proposicional. Demuestre lo siguiente.

    (i) Sea Σ un conjunto de fórmulas y τ una fórmula tales que $\Sigma \models \tau$. Si Γ es el conjunto de las fórmulas de Σ en las que todas las ocurrencias de H son sustituídas por una fórmula β y ϕ es la fórmula que se obtiene de τ al sustituir todas las ocurrencias de H con β, entonces $\Gamma \models \phi$.

    (ii) Si τ es una fórmula tal que $\models \tau$ y ϕ es la fórmula que se obtiene de τ al sustituir todas las ocurrencias de H con β, entonces $\models \phi$.

    (iii) Justifique lo siguiente:

    (a) $\{((B \leftrightarrow C) \vee A) \to (D \to A), ((B \leftrightarrow C) \vee A)\} \models (D \to A)$

    (b) $\models ((A \wedge C) \to (C \vee D) \leftrightarrow (\neg(C \vee D) \to \neg(A \wedge C))$

23. Está usted en una tierra habitada por gente que o siempre dice la verdad o siempre dice mentiras. Llega usted a una encrucijada en el camino y necesita saber cuál de los dos caminos lleva a la capital. Se encuentra a un residente local que sólo tiene tiempo para responder sí o no a una pregunta. ¿Qué pregunta debe usted hacerle para saber cuál de los dos caminos tomar? *Sugerencia:* Haga una tabla de verdad.

24. Muestre que una asignación de verdad v satisface la fórmula $(\cdots(A_1 \leftrightarrow A_2) \leftrightarrow \cdots A_n)$ si y sólo si $v(A_i) = F$ para un número par de i's con $0 \leq i \leq n$. (Por la ley asociativa para $\leftrightarrow$, la colocación de los paréntesis no es crucial.)

25. (Dualidad) Sea α una fórmula cuyos únicos símbolos de conectivo son $\wedge$, $\vee$ y $\neg$. Sea α^* el resultado de intercambiar $\wedge$ y $\vee$ y reemplazar cada símbolo de enunciado por su negación en α. Pruebe que α^* es tautológicamente equivalente a $(\neg\alpha)$. *Sugerencia:* Use inducción. (*Observación:* Se sigue que si α y β son tautológicamente equivalentes, entonces α^* y β^* son tautológicamente equivalentes.)

26. Hay tres sospechosos de un asesinato: Arroyo, Bulnes y Carreño. Arroyo declara: “Yo no lo hice. La víctima era un viejo conocido de Bulnes, pero Carreño lo odiaba.” Bulnes dice: “Yo no lo hice. Ni siquiera conocía al tipo. Además, no estuve en la ciudad durante esa semana.” Carreño dice: “Yo no lo hice. Vi a Arroyo y a Bulnes en la ciudad con la víctima el día del asesinato; uno de ellos tiene que haberlo cometido.” Suponga que los dos inocentes están diciendo la verdad, pero que el culpable está mintiendo. ¿Quién es el asesino?

27. En un anuncio de una revista de tenis se afirma: “Si no estoy jugando tenis, estoy viendo jugar tenis. Y si no estoy viendo jugar tenis, estoy leyendo acerca del tenis.” Podemos suponer que el que habla no puede hacer más que una de estas tres actividades en un momento dado. ¿Qué está haciendo?