Tarea I de Álgebra Lineal II
Semestre 2020-II
29 de enero de 2020

Profra: Gabriela Campero Arena   Ayudte: Yanh Vissuet

I. Funcionales lineales

1. Determine cuáles de las siguientes funciones definidas sobre el espacio vectorial V, son funcionales lineales:
   (i) $V = P(\mathbb{R})$, $f(p(x)) = 2p'(0) + p''(1)$; (ii) $V = \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (2x, 4y)$;
   (iii) $V = \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; (iv) $V = M_{2\times 2}(F)$, $f(A) = A_{11}$;
   (v) $V = M_{2\times 2}(F)$, $f(A) = tr(A)$; (vi) $V = P(\mathbb{R})$, $f(p(x)) = \int_0^1 p(t)dt$.
2. Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas dando prueba o contraejemplo:
   (i) Toda transformación lineal es un funcional lineal.
   (ii) Un funcional lineal definido sobre un campo, puede ser representado como una matriz de 1×1.
   (iii) Todo espacio vectorial es isomorfo a su espacio dual.
   (iv) Todo espacio vectorial es el dual de algún otro espacio vectorial.
   (v) Si T es un isomorfismo que va de V en V^*, y β es una base ordenada finita para V, entonces $T[\beta]=\beta^*$.
   (vi) Si T es una transformación lineal de V en W, entonces el dominio de $(T^t)^t$ es V^{**}.
   (vii) Si V es isomorfo a W, entonces V^* es isomorfo a W^*.
   (viii) La derivada de una función puede ser considerada como un funcional lineal sobre el espacio vectorial de las funciones diferenciables.
   (ix) Un funcional lineal no nulo es siempre sobre.
   (x) Si f y g son funcionales lineales sobre un espacio vectorial V sobre F tales que $N(f) = N(g)$ (sus Kernels son iguales), entonces existe un escalar $\lambda \in F$ tal que $f = \lambda g$.
3. Para cada uno de los siguientes espacios vectoriales V y bases β, encuentre la expresión explícita de los vectores que conforman la base dual β^* para V^*:
   (i) $V = \mathbb{R}^3$; $\beta = \{(1, 0, 1), (1, 2, 1), (0, 0, 1)\}$; (ii) $V = P_2(\mathbb{R})$; $\beta = \{1, x, x^2\}$.
4. Sea $V = \mathbb{R}^3$, y defina f_1, f_2, $f_3 \in V^*$ como $f_1(x, y, z) = x - 2y$, $f_2(x, y, z) = x + y + z$ y $f_3(x, y, z) = y - 3z$. Pruebe que $\{f_1, f_2, f_3\}$ es una base para V^*, y después encuentre una base para V para la cual ésta sea la base dual.
5. Defina $f \in (\mathbb{R}^2)^*$, como $f(x, y) = 2x + y$ y $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ como $T(x, y) = (3x + 2y, x)$.
   (i) Calcule $T^t(f)$.
   (ii) Calcule $[T^t]_{\beta^*}$, donde β es la base ordenada canónica para $\mathbb{R}^2$ y $\beta^* = \{f_1, f_2\}$ es su base dual, encontrando escalares a, b, c y d, tales que $T^t(f_1) = af_1 + cf_2$ y $T^t(f_2) = bf_1 + df_2$.
   (iii) Calcule $[T]_\beta$ y $([T]_\beta)^t$ y compare sus resultados con los del inciso (ii).
6. Sean $V = P_1(\mathbb{R})$ y $W = \mathbb{R}^2$ y sean β y γ las bases ordenadas canónicas de V y W respectivamente. Definamos $T : V \to W$ como $T(p(x)) = (p(0) - 2p(1), p(0) + p'(0))$.
   (i) Para $f \in W^*$ definida como $f(a, b) = a - 2b$, calcule $T^t(f)$.
   (ii) Calcule $[T^t]_{\gamma^*}^{\beta^*}$, sin utilizar el Teorema 2 visto en clase (el Teorema 2.25 del Friedberg).
   (iii) Calcule $[T^t]_\beta^\gamma$ y su transpuesta, y compare sus resultados con los del inciso (ii).
7. Pruebe que una función $T : F^n \to F^m$ es lineal si y sólo si existen $f_1, f_2, ..., f_m \in (F^n)^*$ tales que $T(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x))$ para toda $x \in F^n$. *Sugerencia*: Si T es lineal, defínase $f_i(x) = (g_iT)(x)$ para $x \in F^n$; esto es, $f_i = T^t(g_i)$ para $1 \le i \le m$, donde $g_1, g_2, ..., g_m$ es la base dual de la base canónica para F^m.
8. Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita sobre F, y sean ψ_1 y ψ_2 los isomorfismos entre V y V^{**} y W y W^{**} respectivamente, tal como los definimos en el Teorema 3 visto en clase (Teorema 2.26 del Friedberg). Sea $T : V \to W$ lineal, y definamos $T^{tt} = (T^t)^t$. Pruebe que el diagrama siguiente conmuta, es decir, pruebe que $\psi_2 T = T^{tt}\psi_1$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\psi_1"'] & W \arrow[d, "\psi_2"] \\ V^{**} \arrow[r, "T^{tt}"] & W^{**} \end{tikzcd}$$

9. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con base ordenada β. Pruebe que $\psi[\beta] = \beta^{**}$, con ψ el isomorfismo definido en el Teorema 3 visto en clase (Teorema 2.26 del Friedberg).

En los ejercicios del 10 al 13, V denota un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo F. Para cada $S \subseteq V$, definimos el *anulador* S^0 *de* S como el conjunto $S^0 = \{f \in V^* : \forall x \in S\ (f(x) = 0)\}$.

10. (i) Pruebe que S^0 es un subespacio de V^*.
    (ii) Si W es un subespacio de V y $x \in V \setminus W$, pruebe que existe $f \in W^0$ tal que $f(x) \neq 0$.
    (iii) Pruebe que $(S^0)^0 = \langle \psi[S] \rangle$, donde $\langle \psi[S] \rangle$ es el subespacio generado por $\psi[S]$ y ψ es el isomorfismo definido en el Teorema 3 visto en clase (Teorema 2.26 del Friedberg).
    (iv) Dados dos subespacios W_1 y W_2, pruebe que $W_1 = W_2$ si y sólo si $W_1^0 = W_2^0$.
    (v) Dados dos subespacios W_1 y W_2, pruebe que $(W_1 + W_2)^0 = W_1^0 \cap W_2^0$.
11. Pruebe que si W es un subespacio de V, entonces $dim(W) + dim(W^0) = dim(V)$. *Sugerencia:* Extienda una base ordenada $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$ de W a una base ordenada $\beta = \{x_1, ..., x_n\}$. Defina $\beta^* = \{f_1, ..., f_n\}$ y pruebe que $\{f_{k+1}, ..., f_n\}$ es base para W^0.
12. Supóngase que W es un espacio vectorial de dimensión finita y que $T : V \to W$ es lineal. Pruebe que $N(T^t) = (R(T))^0$. Utilice este ejercicio y el anterior para concluir que $\forall A \in M_{n\times n}(F)$ $(rango(L_{A^t}) = rango(L_A))$, donde L_B es la transformación de multiplicación por la izquierda de la matriz B.
13. Sea T un operador lineal definido sobre V y sea W un subespacio de V. Recuerde que W es T-*invariante* si y sólo si $\forall w \in W$ $(T(w) \in W)$. Pruebe que W es T-invariante si y sólo si W^0 es T^t-invariante.
14. Sea V un espacio vectorial no nulo sobre un campo F, y sea S una base para V (el semestre pasado probamos que todo espacio vectorial tiene una base). Recuerde que $\mathcal{F}(S, F)$ es el espacio vectorial de las funciones de S en F. Sea $\Phi : V^* \to \mathcal{F}(S, F)$ la función definida como $\Phi(f) = f \restriction_S$, la restricción de f a S. Pruebe que Φ es un isomorfismo. *Sugerencia:* Aplique la generalización para el caso de dimensión infinita del Teorema 2.6 del Friedberg.
15. Sea V un espacio vectorial no nulo y sea W un subespacio propio de V, (es decir, $V \neq W$). Pruebe que existe un funcional lineal $f \in V^*$ no nulo tal que $\forall x \in W$ $(f(x) = 0)$. *Sugerencia:* Para el caso de dimensión infinita, utilice nuevamente la generalización del Teorema 2.6, así como los resultados que vimos en el curso anterior acerca de extender conjuntos linealmente independientes a bases.
16. Sean V y W espacios vectoriales no nulos sobre el mismo campo F y sea $T : V \to W$ una transformación lineal.
    (i) Pruebe que T es sobre si y sólo si T^t es inyectiva.
    (ii) Pruebe que T^t es sobre si y sólo si T es inyectiva. *Sugerencia:* Utilice el ejercicio anterior para el caso de dimensión infinita.
17. Demuestre que para cualquier funcional lineal no nulo $f : V \to F$, $N(f)$ tiene codimensión 1, donde la codimensión de un subespacio W de V es la dimensión del espacio cociente V/W, definido en el ejercicio 5 y revisitado en los ejercicios 14 y 18 de la Tarea 0.

II.Eigenvalores y eigenvectores

18. Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, dando prueba o contraejemplo.
    (i) Todo operador lineal definido en un espacio de dimensión n, tiene n eigenvalores distintos.
    (ii) Si una matriz con entradas reales tiene un eigenvector, entonces tiene una infinidad de eigenvectores.
    (iii) Existe una matriz cuadrada que no tiene eigenvectores.
    (iv) Los eigenvalores deben ser escalares distintos de cero.
    (v) Cualesquiera dos eigenvectores son linealmente independientes.
    (vi) La suma de dos eigenvalores de un operador lineal T es también un eigenvalor de T.
    (vii) Los operadores lineales definidos en un espacio de dimensión infinita no tienen eigenvalores.
    (viii) Una matriz A de $n \times n$ con entradas en un campo F es similar a una matriz diagonal si y sólo si existe una base para F^n que consiste de eigenvectores de A.
    (ix) Matrices similares siempre tienen los mismos eigenvalores.
    (x) Matrices similares siempre tienen los mismos eigenvectores.
    (xi) La suma de dos eigenvectores de una transformación lineal T siempre es un eigenvector de T.
19. Para los siguientes operadores T definidos sobre un espacio vectorial V con base β, calcule $[T]_\beta$ y determine si β es una base que consiste de eigenvectores de T.
    (i) $V = R^2$, $T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10a - 6b \\ 17a - 10b \end{pmatrix}$ y $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$;
    (ii) $V = R^3$, $T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a + 2b - 2c \\ -4a - 3b + 2c \\ -c \end{pmatrix}$ y $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$;
    (iii) $V = P_2(\mathbb{R})$, $T(a + bx + cx^2) = (-4a + 2b - 2c) - (7a + 3b + 7c)x + (7a + b + 5c)x^2$, y $\beta = \{x - x^2, -1 + x^2, -1 - x + x^2\}$.
20. Para las siguientes matrices $A \in M_{n\times n}(F)$,

(i) determine todos los eigenvalores de A;
(ii) para cada eigenvalor λ de A, encuentre el conjunto de eigenvectores correspondiente a λ;
(iii) si es posible, encuentre una base para F^n consistente de eigenvectores de A;
(iv) si encuentra tal base, determine una matriz invertible Q y una matriz diagonal D tal que $Q^{-1}AQ = D$.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, con $F = \mathbb{R}$; (b) $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, con $F = \mathbb{R}$; (c) $A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 2 & -i \end{pmatrix}$, con $F = \mathbb{C}$.

21. Sea T un operador lineal definido sobre un espacio de dimensión finita V y sea β una base ordenada para V. Pruebe que λ es un eigenvalor de T si y sólo si λ es un eigenvalor para $[T]_\beta$.
22. Sea T un operador lineal definido sobre un espacio de dimensión finita V. Definimos el *determinante de* T, denotado $det(T)$, como sigue: elija una base ordenada cualquiera β para V, y defina $det(T) = det([T]_\beta)$.
   (i) Pruebe que la definición anterior es independiente de la elección de la base ordenada para V, es decir, pruebe que si β y γ son bases ordenadas para V, entonces $det([T]_\beta) = det([T]_\gamma)$.
   (ii) Pruebe que para cualquier escalar λ y cualquier base ordenada β para V, $det(T - \lambda I_V) = det([T]_\beta - \lambda I)$.
23. (i) Pruebe que un operador lineal T definido sobre un espacio de dimensión finita es invertible si y sólo si el cero no es un eigenvalor de T.
   (ii) Sea T un operador lineal invertible. Pruebe que un escalar λ es un eigenvalor de T si y sólo si λ^{-1} es un eigenvalor para T^{-1}.
   (iii) Establezca y pruebe resultados análogos a los incisos anteriores para matrices.
24. Pruebe que los eigenvalores de una matriz triangular M son las entradas en la diagonal de M.
25. Sea V un espacio de dimensión finita y sea λ un escalar cualquiera.
   (i) Para cualquier base ordenada β para V, pruebe que $[\lambda I]_\beta = \lambda I$.
   (ii) Calcule el polinomio característico de λI_V.
   (iii) Pruebe que λI_V es diagonalizable y tiene un solo eigenvalor.
26. Una *matriz escalar* es una matriz cuadrada de la forma λI para algún escalar λ; es decir, una matriz escalar es una matriz diagonal en la que todas sus entradas en la diagonal son iguales.
   (i) Pruebe que si una matriz cuadrada A es similar a una matriz escalar λI, entonces $A = \lambda I$.
   (ii) Pruebe que una matriz diagonalizable con un solo eigenvalor, es una matriz escalar.
   (iii) Pruebe que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ no es diagonalizable.
27. (i) Pruebe que matrices similares tienen el mismo polinomio característico.
   (ii) Pruebe que la definición de polinomio característico de un operador lineal definido sobre un espacio V, no depende de la elección de la base para V.
28. Para cualquier matriz cuadrada A, pruebe que A y A^t tienen el mismo polinomio característico y por tanto los mismos eigenvalores.
29. (i) Sea T un operador lineal definido sobre un espacio vectorial V, y sea x un eigenvector de T correspondiente al eigenvalor λ. Para cualquier entero positivo m, pruebe que x es un eigenvector de T^m correspondiente al eigenvalor λ^m.
   (ii) Establezca y pruebe un resultado análogo para matrices.
30. Sea T el operador lineal definido sobre $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $T(A) = A^t$.
   (i) Pruebe que 1 y -1 son los únicos eigenvalores de T.
   (ii) Describa los eigenvectores correspondientes a cada eigenvalor de T.
   (iii) Encuentre una base ordenada β para $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, tal que $[T]_\beta$ es una matriz diagonal.
   (iv) Encuentre una base ordenada β para $M_{n\times n}(\mathbb{R})$, tal que $[T]_\beta$ es una matriz diagonal para $n \geq 3$.
31. Sean A y B matrices similares de $n \times n$. Pruebe que existe un espacio vectorial V de dimensión n, un operador lineal T definido sobre V, y bases ordenadas β y γ para V, tales que $A = [T]_\beta$ y $B = [T]_\gamma$. *Sugerencia:* Considere F^n y alguna transformación conocida cuyo dominio sea F^n.
32. Sea A una matriz de $n \times n$ cuyo polinomio característico es: $f(t) = (-1)^n t^n + a_{n-1} f^{n-1} + ... + a_1 t + a_0$.
   (i) ¿Quién es $f(0)$? Deduzca que A es invertible si y sólo si $a_0 \neq 0$.
   (ii) Pruebe que $f(t) = (A_{11} - t)(A_{22} - t)...(A_{nn} - t) + q(t)$, donde $q(t)$ es un polinomio de grado a lo más $n - 2$. *Sugerencia:* Aplique inducción sobre n.
33. (i) Sea T un operador lineal definido en un espacio vectorial V sobre un campo F y sea $g(t)$ un polinomio con coeficientes en F. Pruebe que si x es eigenvector de T correspondiente al eigenvalor λ, entonces $g(T)(x) = g(\lambda)x$. Esto significa que x es eigenvector de $g(T)$ correspondiente al eigenvalor $g(\lambda)$.
   (ii) Establezca un resultado análogo para matrices.
   (iii) Corrobore el inciso (ii) para la matriz A del ejercicio 19(i) con el polinomio $g(t) = 2t^2 - t + 1$, eigenvector $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, y el correspondiente eigenvalor $\lambda = 4$.
   (iv) Utilice el inciso (i) de este ejercicio para probar que si $f(t)$ es el polinomio característico de un operador lineal diagonalizable T, entonces $f(t) = T_0$, el operador cero. (Más adelante demostraremos que este resultado no depende de la diagonalizabilidad de T).
34. Sean A y B matrices cuadradas de $n \times n$ sobre un campo F y sea $\lambda \in F$. Demuestre lo siguiente:

(i) $AB - \lambda I_n$ es invertible si y sólo si $BA - \lambda I_n$ es invertible.

(ii) AB tiene los mismos eigenvalores que BA.

35. Enuncie y demuestre un resultado análogo al del ejercicio anterior para operadores lineales.

III. Diagonalizabilidad

36. Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, dando prueba o contraejemplo.
    (i) Cualquier operador lineal definido sobre un espacio de dimensión n que tenga menos de n eigenvalores distintos, no es diagonalizable.
    (ii) Dos eigenvectores distintos correspondientes al mismo eigenvalor son siempre linealmente independientes.
    (iii) Si λ es un eigenvalor de un operador lineal T, entonces cada vector en E_λ es eigenvector de T.
    (iv) Si λ_1 y λ_2 son eigenvalores distintos de un operador lineal T, entonces $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0\}$.
    (v) Sean $A \in M_{n\times n}(F)$, y $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ una base ordenada para F^n que consiste de eigenvectores de A. Si Q es la matriz de $n \times n$ cuya j-ésima columna es v_j para $1 \leq i \leq n$, entonces $Q^{-1}AQ$ es una matriz diagonal.
    (vi) Un operador lineal T definido en un espacio de dimensión finita es diagonalizable si y sólo si la multiplicidad de cada eigenvalor λ es igual a la dimensión del eigenespacio E_λ.
    (vii) Todo operador lineal diagonalizable en un espacio vectorial distinto del trivial, tiene al menos un eigenvalor.

37. Para cada una de las siguientes matrices $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, investigue si A es diagonalizable, y en su caso encuentre una matriz invertible Q y una matriz diagonal D tal que $Q^{-1}AQ = D$.
    (i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ En este caso. ¿Cuál sería una expresión para A^n?
    (iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

38. Para cada uno de los siguientes operadores lineales T definidos en el espacio vectorial V, averigüe si T es diagonalizable y en su caso, encuentre una base β para V tal que $[T]_\beta$ es una matriz diagonal.
    (i) $V = P_2(\mathbb{R})$, y $T(f(x)) = f(0) + f(1)(x + x^2)$.
    (ii) $V = \mathbb{C}^2$ y $T(z, w) = (z + iw, iz + w)$.
    (iii) $V = M_{n\times n}(\mathbb{R})$ y $T(A) = A^t$.

39. Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial de dimensión finita V, y supóngase que existe una base ordenada β para V tal que $[T]_\beta$ es una matriz triangular superior. Pruebe que el polinomio característico de T se descompone.

40. Sea T un operador lineal definido en un espacio vectorial de dimensión finita V con eigenvalores distintos $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ con multiplicidades $m_1, m_2, ..., m_k$ respectivamente. Suponga que β es una base para V tal que $[T]_\beta$ es una matriz triangular superior. Pruebe que las entradas en la diagonal de $[T]_\beta$ son $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ y que cada λ_i aparece m_i veces para $1 \leq i \leq k$.

41. Sea T un operador lineal invertible definido en un espacio vectorial de dimensión finita V.
    (i) Recuerde que si λ es eigenvalor de T, λ^{-1} es eigenvalor de T^{-1}. Pruebe que el eigenespacio de T correspondiente a λ es el mismo eigenespacio de T^{-1} correspondiente a λ^{-1}.
    (ii) Pruebe que si T es diagonalizable, entonces T^{-1} también lo es.

42. Sea $A \in M_{n\times n}(F)$. Recuerde del ejercicio 27 que A y A^t tienen los mismos eigenvalores con las mismas multiplicidades. Para cada eigenvalor λ de A y A^t, sean E_λ y E'_λ los correspondientes eigenespacios para A y A^t respectivamente.
    (i) Pruebe mediante un ejemplo que para un eigenvalor dado, estos dos eigenespacios no necesariamente son iguales.
    (ii) Pruebe que para cualquier eigenvalor λ, $dim(E_\lambda) = dim(E'_\lambda)$.
    (iii) Pruebe que si A es diagonalizable, entonces A^t también lo es.

43. Supongamos que hay subespacios $W_1, \cdots, W_k$ de un espacio vectorial V. ¿Es equivalente decir que $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ a decir que $V = \Sigma_{i=1}^k W_i$ y $\forall i \in \{1, \cdots, k\}(i \neq j \implies W_i \cap W_j = \varnothing)$?

44. Sean W_1, W_2, ..., W_k subespacios de un espacio vectorial de dimensión finita V tales que $\sum_{i=1}^k W_i = V$. Demuestre que V es la suma directa de W_1, W_2, ..., W_k si y sólo si $dim(V) = \sum_{i=1}^k dim(W_i)$.

45. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con base β y sea $\{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k\}$ una partición de β. Demuestre que V es la suma directa de $\langle\beta_1\rangle$, $\langle\beta_2\rangle$, ..., $\langle\beta_k\rangle$.

46. Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial de dimensión finita V y supongáse que todos los distintos eigenvalores de T son λ_1, λ_2, ..., λ_k. Demuestre que $\langle\{x \in V : x \text{ es un eigenvector de } T\}\rangle = \oplus_{i=1}^k E_{\lambda_i}$.

47. Sean W_1, W_2, K_1, K_2, ..., K_p, M_1, M_2, ..., M_q subespacios de un espacio vectorial V tales que $W_1 = \oplus_{i=1}^p K_i$ y $W_2 = \oplus_{i=1}^q M_i$. Demuestre que si $W_1 \cap W_2 = \{\overline{0}\}$, entonces $W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2$. Es decir, que $W_1 + W_2 = K_1 \oplus K_2 \oplus \cdots \oplus K_p \oplus M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_q$.