Tarea I de Álgebra Lineal I

Semestre 2020-I

10 de agosto de 2019

Profra: Gabriela Campero Arena | Ayudtes: Yanh Vissuet Oliver

1. Encuentre las ecuaciones que se piden y explique intuitivamente por qué es la ecuación correcta:
   (i) la ecuación de la recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por los puntos $(3,-2,4)$ y $(-5,7,1)$;
   (ii) la ecuación del plano en $\mathbb{R}^3$ que pasa por los puntos $(2,-5,-1)$, $(0,4,6)$ y $(-3,7,1)$.
2. ¿Cuáles son las coordenadas del vector cero en $\mathbb{R}^3$? Justifique su respuesta.
3. Demuestre que el punto medio del segmento de recta que une los puntos (a,b) y (c,d) en $\mathbb{R}^2$ tiene coordenadas $(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2})$.
4. Demuestre que las diagonales de un paralelogramo cualquiera se bisectan.
5. Sea $S=\{0,1\}$ y sea $\mathcal{F}(S,\mathbb{R})$ el espacio vectorial de todas las funciones $f:S\to\mathbb{R}$. Demuestre que $f=g$ y $f+g=h$, donde $f(t)=2t+1$, $g(t)=1+4t-2t^2$ y $h(t)=5^t+1$.
6. Sea F un campo y V un espacio vectorial sobre F. Demuestre que se cumple lo siguiente:
   (i) $\forall x,y,z\in V\ (x+z=y+z\Rightarrow x=y)$, es decir, se cumple la ley de la cancelación de la suma;
   (ii) el vector cero de V es único;
   (iii) dado un vector $x\in V$, el vector $-x$ es único;
   (iv) $\forall x\in V\ (0x=\overline{0})$;
   (v) $\forall a\in F\ (a\overline{0}=\overline{0})$;
   (vi) $\forall a\in F\forall x\in V\ ((-a)x=-(ax)=a(-x))$;
   (vii) $\forall a,b\in F\ \forall x,y\in V\ ((a+b)(x+y)=ax+ay+bx+by)$;
   (viii) $\forall a\in F\,\forall v\in V\ (av=\overline{0}\Leftrightarrow(a=0 \text{ ó } v=\overline{0}))$;
   (ix) $\forall a,b\in F\,\forall v,w\in V(av+bw=bv+aw\Leftrightarrow(a=b \text{ ó } v=w))$.
7. Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, dando prueba o contraejemplo.
   (i) Hay espacios vectoriales que tienen más de un vector cero.
   (ii) Sea F un campo. En cualquier espacio vectorial V sobre F sucede que $\forall x\in V\forall a,b\in F(ax=bx\Rightarrow a=b)$.
   (iii) Sea F un campo. En cualquier espacio vectorial V sobre F sucede que $\forall x,y\in V\forall a\in F(ax=ay\Rightarrow x=y)$.
   (iv) Sea F un campo. En cualquier espacio vectorial V sobre F sucede que $\forall x\in V\forall a,b\in F((x\neq\overline{0} \text{ y } ax=bx)\Rightarrow a=b)$.
   (v) Sea F un campo. En cualquier espacio vectorial V sobre F sucede que $\forall x,y\in V\forall a\in F((a\neq 0 \text{ y } ax=ay)\Rightarrow x=y)$.
   (vi) En el espacio vectorial $P(F)$ de los polinomios con coeficientes en el campo F, sólo se pueden sumar polinomios que tengan el mismo grado.
   (vii) Dados dos polinomios f y g en $P(F)$, si ambos son de grado n, entonces $f+g$ es de grado n.
   (viii) Dado un polinomio f en $P(F)$, si f es de grado n y c es un escalar no cero de F, entonces cf es un polinomio de grado n.
8. Sea V el conjunto con un sólo elemento: el vector cero; es decir, $V=\{\overline{0}\}$. Sea F cualquier campo. Defínase la operación $+$ sobre V como $\overline{0}+\overline{0}=\overline{0}$ y defínase la multiplicación escalar para todo $a\in F$ como $a\overline{0}=\overline{0}$. Demuestre que V es un espacio vectorial.
9. Diga si los siguientes son espacios vectoriales o no, justificando su respuesta.
   (i) Sea $V=\{(a_1,a_2):a_1,a_2\in\mathbb{R}\}$, y dados (a_1,a_2), $(b_1,b_2)\in V$ y $c\in\mathbb{R}$, defínanse las operaciones de suma y multiplicación escalar en V sobre $\mathbb{R}$ de la siguiente manera:
   $(a_1,a_2)+(b_1,b_2)=(a_1+b_1,a_2b_2)$, $\quad c(a_1,a_2)=(ca_1,a_2)$.
   (ii) Sea F un campo cualquiera, sea $V=\{(a_1,a_2):a_1,a_2\in F\}$, y dados (a_1,a_2), $(b_1,b_2)\in V$ y $c\in F$, defínanse las operaciones de suma y multiplicación escalar en V sobre F de la siguiente manera:
   $(a_1,a_2)+(b_1,b_2)=(a_1+b_1,a_2+b_2)$, $\quad c(a_1,a_2)=(a_1,0)$.
   (iii) Sea $V=\{(a_1,a_2):a_1,a_2\in\mathbb{R}\}$, y dados (a_1,a_2), $(b_1,b_2)\in V$ y $c\in\mathbb{R}$, defínanse las operaciones de suma y multiplicación escalar en V sobre $\mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + 2b_1, a_2 + 3b_2)$, $c(a_1, a_2) = (ca_1, ca_2)$.

(iv) Sea $V = \{(a_1, a_2) : a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$, y dados (a_1, a_2), $(b_1, b_2) \in V$ y $c \in \mathbb{R}$, defínanse las operaciones de suma y multiplicación escalar en V sobre $\mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$, $c(a_1, a_2) = \begin{cases} (0,0) & \text{si } c = 0, \\ (ca_1, \frac{a_2}{c}) & \text{si } c \neq 0. \end{cases}$

10. En este ejercicio se trata la importancia del campo sobre el que está definido un espacio vectorial. Conteste las siguientes preguntas, justificando su respuesta:

(i) Sea $V = \{(a_1, a_2, ..., a_n) : a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{C}\}$, y dados $(a_1, a_2, ..., a_n)$, $(b_1, b_2, ..., b_n) \in V$ y $c \in \mathbb{R}$, defínanse las operaciones de suma y multiplicación escalar en V *sobre* $\mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$(a_1, ..., a_n) + (b_1, ..., b_n) = (a_1 + b_1, ..., a_n + b_n)$, $c(a_1, a_2, ..., a_n) = (ca_1, ca_2, ..., ca_n)$.

¿Es V un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{R}$?

(ii) Sea $V = \{(a_1, a_2, ..., a_n) : a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}\}$, y dados $(a_1, a_2, ..., a_n)$, $(b_1, b_2, ..., b_n) \in V$ y $c \in \mathbb{C}$, defínanse las operaciones de suma y multiplicación escalar en V *sobre* $\mathbb{C}$ de la siguiente manera:

$(a_1, a_2, ..., a_n) + (b_1, b_2, ..., b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n)$, $c(a_1, a_2, ..., a_n) = (ca_1, ca_2, ..., ca_n)$.

¿Es V un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{C}$?

(iii) Sean $n, m \in \mathbb{N}^+$. Sea V el conjunto de todas las matrices de $n \times m$ con entradas en $\mathbb{R}$, sea $\mathbb{Q}$ el campo de los racionales, y defínanse las operaciones de suma y multiplicación escalar en V *sobre* $\mathbb{Q}$ de la manera usual: para cualesquiera A, $B \in V$, $(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$ y cualquier $c \in \mathbb{Q}$ y cualquier $A \in V$, $(cA)_{ij} = cA_{ij}$. ¿Es V un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{Q}$?

(iv) ¿Es $\mathbb{C}$ un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{R}$?

(v) ¿Es $\mathbb{Q}$ un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{R}$?

11. Sea V el conjunto de todas las sucesiones $\{a_n\}$ con entradas en $\mathbb{R}$. Para $\{a_n\}, \{b_n\} \in V$ y $t \in \mathbb{R}$, defínanse las operaciones de suma y multiplicación escalar de la siguiente manera: $\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$, $t\{a_n\} = \{ta_n\}$. Demuestre que V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

12. Sea F un campo cualquiera y sean V y W dos espacios vectoriales sobre el campo F, donde $+_V$ es la suma vectorial en V y $\cdot_V$ es la multiplicación escalar en V, y $+_W$ es la suma vectorial en W y $\cdot_W$ es la multiplicación escalar en W. Sea $Z = \{(v, w) : v \in V \text{ y } w \in W\}$, y dados (v_1, w_1), $(v_2, w_2) \in Z$ y $c \in F$, defínanse las operaciones de suma y multiplicación escalar de la siguiente manera: $(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 +_V v_2, w_1 +_W w_2)$, $c(v_1, w_1) = (c \cdot_V v_1, c \cdot_W w_1)$.
Demuestre que Z es un espacio vectorial sobre F.

13. Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, dando prueba o contraejemplo.

(i) El conjunto vacío es un subespacio de cualquier espacio vectorial.

(ii) Si V es un espacio vectorial tal que $V \neq \{\overline{0}\}$, entonces existe un subespacio W de V tal que $W \neq V$.

(iii) La intersección de dos subconjuntos de un espacio vectorial es un espacio vectorial.

(iv) Sea V un espacio vectorial y sean $\{W_i : i \in I\}$ subespacios de V. Entonces $\bigcap_{i \in I}\{W_i : i \in I\}$ es un subespacio de V.

(v) Sea W el plano xy en $\mathbb{R}^3$, es decir, $W = \{(a_1, a_2, 0) : a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$. Entonces $W = \mathbb{R}^2$.

14. Sea F un campo. Demuestre las siguientes propiedades que cumplen las operaciones entre matrices.

(i) Para cualesquiera $a, b \in F$ y $A, B \in M_{m \times n}(F)$, $(aA + bB)^t = aA^t + bB^t$.

(ii) Para cualquier $A \in M_{m \times n}(F)$, $(A^t)^t = A$.

(iii) Para cualquier $A \in M_{n \times n}(F)$, $A + A^t$ es simétrica.

(iv) Para cualesquiera $a, b \in F$ y $A, B \in M_{n \times n}(F)$, $\operatorname{tr}(aA + bB) = a \operatorname{tr}(A) + b \operatorname{tr}(B)$.

(v) Demuestre que las matrices diagonales son simétricas.

15. Dados los espacios vectoriales siguientes, diga si los subconjuntos dados son subespacios de los espacios vectoriales, justificando su respuesta.

(i) En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, el subconjunto $\{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 : a_1 = 3a_2 \text{ y } a_3 = -a_2\}$.

(ii) En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, el subconjunto $\{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 : 5a_1^2 - 3a_2^2 + 6a_3^2 = 0\}$.

(iii) En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$, el subconjunto $\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 | a + 3c - 2d = 0 \text{ y } -5b + 2a - 6c = d\}$.

(iv) En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$, el subconjunto $\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 | c + d \geq 0\}$.

(v) Sea F un campo cualquiera. En el espacio vectorial F^n, el subconjunto $\{(a_1, a_2, ..., a_n) \in F^n : a_1 + a_2 + ... + a_n = 0\}$.

(vi) Sea F un campo cualquiera. En el espacio vectorial F^n, el subconjunto $\{(a_1, a_2, ..., a_n) \in F^n : a_1 + a_2 + ... + a_n = 1\}$.

(vii) Sea $n \in \mathbb{N}^+$. En el espacio vectorial de los polinomios $P(F)$, el subconjunto $\{f(x) \in P(F) : f(x) = 0$ ó $f(x)$ tiene grado $n\}$.

(viii) Sea F un campo cualquiera y sea S un conjunto no vacío cualquiera. Sea $s_0 \in S$. En el espacio vectorial de las funciones que van de S en F, $\mathcal{F}(S, F)$, el subconjunto $\{f \in \mathcal{F}(S, F) : f(s_0) = 0\}$.

(ix) Sea F un campo cualquiera y sea S un conjunto no vacío cualquiera. En el espacio vectorial de las funciones que van de S en F, $\mathcal{F}(S, F)$, el subconjunto $\mathcal{C}(S, F)$ de todas las funciones $f \in \mathcal{F}(S, F)$ tales que $f(s) = 0$ para todos menos por un número finito de elementos s de S.

(x) En el espacio vectorial de las funciones continuas que van de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, $\mathrm{C}(\mathbb{R})$, el subconjunto de todas las funciones diferenciables.

16. Sea F un campo cualquiera. Demuestre que un subconjunto W es un subespacio de un espacio vectorial V si y sólo si $W \neq \varnothing$ y para cualesquiera $a \in F$ y $x, y \in W$, $ax \in W$ y $x + y \in W$.
17. Sea F un campo cualquiera. Demuestre que un subconjunto W es un subespacio de un espacio vectorial V si y sólo si $0 \in W$ y para cualesquiera $a \in F$ y $x, y \in W$, $ax + y \in W$.
18. Sean W_1 y W_2 subespacios de un espacio vectorial V. Demuestre que $W_1 \cup W_2$ es un subespacio de V si y sólo si $W_1 \subseteq W_2$ ó $W_2 \subseteq W_1$.
19. Sea F un campo cualquiera y sea V un espacio vectorial sobre F. Demuestre que si W es un subespacio de V, entonces para cualesquiera $w_1, w_2, ..., w_n \in W$ y cualesquiera $a_1, a_2, ..., a_n \in F$ $a_1w_1 + a_2w_2 + ... + a_nw_m \in W$. *Sugerencia:* Inducción.
20. Sean W_1 y W_2 subespacios de un espacio vectorial V.

    (i) Demuestre que $W_1 + W_2$ es un subespacio de V que contiene a ambos subespacios W_1 y W_2.

    (ii) Demuestre que cualquier subespacio de V que contenga a ambos subespacios W_1 y W_2 también debe contener al subespacio $W_1 + W_2$.

21. Dados los siguientes espacios vectoriales V y los subconjuntos W_1 y W_2 de V, demuestre que W_1 y W_2 son subespacios de V y que $V = W_1 \oplus W_2$.

    (i) F_1 campo cualesquiera y F_2 campo cualquiera con característica distinta de 2, $V = \mathcal{F}(F_1, F_2)$, W_1 el conjunto de las funciones pares y W_2 el conjunto de las funciones impares, es decir,
    $W_1 = \{f \in \mathcal{F}(F_1, F_2) : \forall c \in F_1\, f(c) = f(-c)\}$ y $W_2 = \{f \in \mathcal{F}(F_1, F_2) : \forall c \in F_1\, f(-c) = -f(c)\}$.

    (ii) F un campo cualquiera, $V = F^n$,
    $W_1 = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \in F^n : a_n = 0\}$ y $W_2 = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \in F^n : a_1 = a_2 ... = a_{n-1} = 0\}$.

    (iii) F un campo cualquiera, $V = P(F)$, W_1 es el conjunto de todos los polinomios $f(x)$ en $P(F)$ tales que en su representación $f(x) = a_nx^n + a_{n-1} + ... + a_1x + a_0$ se tiene que $a_i = 0$ siempre que i es par, y W_2 es el conjunto de todos los polinomios $f(x)$ en $P(F)$ tales que en su representación $f(x) = a_nx^n + a_{n-1} + ... + a_1x + a_0$ se tiene que $a_i = 0$ siempre que i es impar.

    (iv) F un campo cualquiera, $m, n \in \mathbb{N}^+$, $V = M_{m\times n}(F)$, $W_1 = \{A \in M_{m\times n}(F) : A_{ij} = 0 \text{ si } i > j\}$,
    $W_2 = \{A \in M_{m\times n}(F) : A_{ij} = 0 \text{ si } i \leq j\}$.

    (v) F un campo cualquiera, $n \in \mathbb{N}^+$, $V = \{A \in M_{n\times n}(F) : A_{ij} = 0 \text{ si } i > j\}$, $W_1 = \{A \in V : A \text{ es diagonal }\}$,
    $W_2 = \{A \in V : A_{ij} = 0 \text{ si } i \geq j\}$.

    (vi) F un campo cualquiera, $V = M_{n\times n}(F)$, $W_1 = \{A \in M_{n\times n}(F) | A_{ij} = 0 \text{ si } i \leq j\}$ y
    $W_2 = \{A \in M_{n\times n}(F) | A \text{ es simétrica}\}$.

22. Sean W_1 y W_2 subespacios de un espacio vectorial V. Demuestre que $V = W_1 \oplus W_2$ si y sólo si cada elemento x de V puede ser escrito de manera única como $x_1 + x_2$ con $x_1 \in W_1$ y $x_2 \in W_2$.
23. Sea F un campo cualquiera con característica distinta de dos. Sean $V = M_{n\times n}(F)$, $W_1 = \{A \in M_{n\times n}(F) | A^t = A\}$ (i.e. las matrices simétricas) y $W_2 = \{A \in M_{n\times n}(F) | A^t = -A\}$ (i.e. W_2 son las matrices antisimétricas). Demuestre que $V = W_1 \oplus W_2$.
24. Sea W un subespacio de un espacio vectorial V sobre un campo F. Para cada $v \in V$, defínase el conjunto $\{v\} + W = \{v + w : w \in W\}$. Este conjunto a veces se denota solamente como $v + W$.

    (i) Demuestre que $v + W$ es un subespacio de V si y sólo si $v \in W$.

    (ii) Demuestre que $v_1 + W = v_2 + W$ si y sólo si $v_1 - v_2 \in W$.

    (iii) Sea $S = \{v + W : v \in V\}$. Definimos la suma $+_S$ en S y la multiplicación escalar $\cdot_S$ en S de la siguiente manera: para cualesquiera $v_1, v_2 \in V$, $(v_1+W)+_S(v_2+W) = (v_1+v_2)+W$, y para cualesquiera $v \in V$ y $a \in F$, $a\cdot_S(v+W) = (av)+W$. Demuestre que estas operaciones están bien definidas, es decir, demuestre que si $v_1 + W = v_1' + W$ y $v_2 + W = v_2' + W$, entonces $(v_1 + W) +_S (v_2 + W) = (v_1' + W) +_S (v_2' + W)$ y para todo $a \in F$, $a \cdot_S (v_1 + W) = a \cdot_S (v_1' + W)$.

    (iv) Demuestre que la estructura $(S, +_S, \cdot_S)$ es un espacio vectorial. Este espacio vectorial se denota como V/W y se llama *el espacio cociente de V módulo W*.