Tarea de Repaso de Álgebra Lineal I
Semestre 2020-II
28 de enero de 2020

Profra: Gabriela Campero Arena   Ayudte: Yanh Vissuet Oliver

I. Espacios vectoriales y bases

1. Sea V un espacio vectorial sobre un campo F. Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, dando demostración bien justificada o contraejemplo.
   (i) $\forall a \in F\ \forall x, y \in V\ (ax = ay \implies x = y)$;
   (ii) $\forall a, b \in F\ \forall x \in V\ ((x \neq \overline{0}$ y $ax = bx) \implies a = b)$.
2. Sea $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ el espacio vectorial de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ sobre el campo $\mathbb{R}$. Sea $X \subseteq \mathbb{R}$. ¿Es $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \forall x \in X(f(x) = 0)\}$ un subespacio de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$? Justifique su respuesta.
3. Sean W_1 y W_2 subespacios de un espacio vectorial V. Demuestre que $W_1 \cup W_2$ es un subespacio de V si y sólo si $W_1 \subseteq W_2$ ó $W_2 \subseteq W_1$.
4. Sean W_1 y W_2 subespacios de un espacio vectorial V.
   Demuestre que $W_1 + W_2 := \{w_1 + w_2 \in V \mid w_1 \in W_1$ y $w_2 \in W_2\}$ es un subespacio de V que contiene a ambos subespacios W_1 y W_2.
5. Sea W un subespacio de un espacio vectorial V sobre un campo F. Para cada $v \in V$, defínase el conjunto $\{v\} + W = \{v + w : w \in W\}$. Este conjunto a veces se denota solamente como $v + W$.
   a) Demuestre que $v + W$ es un subespacio de V si y sólo si $v \in W$.
   b) Demuestre que $v_1 + W = v_2 + W$ si y sólo si $v_1 - v_2 \in W$.
   c) Sea $S = \{v + W : v \in V\}$. Definimos la suma $+_S$ en S y la multiplicación escalar $\cdot_S$ en S de la siguiente manera: para cualesquiera $v_1, v_2 \in V$, $(v_1 + W) +_S (v_2 + W) = (v_1 + v_2) + W$, y para cualesquiera $v \in V$ y $a \in F$, $a \cdot_S (v + W) = (av) + W$. Demuestre que estas operaciones están bien definidas, es decir, demuestre que si $v_1 + W = v_1' + W$ y $v_2 + W = v_2' + W$, entonces $(v_1 + W) +_S (v_2 + W) = (v_1' + W) +_S (v_2' + W)$ y para todo $a \in F$, $a \cdot_S (v_1 + W) = a \cdot_S (v_1' + W)$.
   d) Demuestre que la estructura $(S, +_S, \cdot_S)$ es un espacio vectorial. Este espacio vectorial se denota como V/W y se llama *el espacio cociente de V módulo W*.
6. Sea $n \in \mathbb{N}^+$. Sea F un campo cualquiera y sea $M_{n\times n}(F)$ el espacio vectorial de todas las matrices de $n \times n$ con entradas en F.
   (i) Demuestre que para cualquier $A \in M_{n\times n}(F)$ y cualquier $c \in F$, $c(A + A^t)$ es una matriz simétrica.
   (ii) Decimos que una matriz $A \in M_{n\times n}(F)$ es antisimétrica si $-A = A^t$. Demuestre que para cualquier $A \in M_{n\times n}(F)$ y cualquier $c \in F$, $c(A - A^t)$ es una matriz antisimétrica.
   (iii) Suponga que F tiene característica distinta de 2. Sean $W_1 = \{A \in M_{n\times n}(F) : A = A^t\}$ y $W_2 = \{A \in M_{n\times n}(F) : -A = A^t\}$, es decir, W_1 es el conjunto de todas las matrices simétricas de $n \times n$ con entradas en F y W_2 es el conjunto de todas las matrices antisimétricas de $n \times n$ con entradas en F. Demuestre que $M_{n\times n}(F) = W_1 \oplus W_2$.
7. Recuerde que dado un subconjunto S de un espacio vectorial V, denotamos por $\langle S\rangle$ al conjunto de combinaciones lineales finitas de elementos en S. Sean S_1 y S_2 subconjuntos cualesquiera de un espacio vectorial V. Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando con prueba o contraejemplo:
   (i) $\langle S\rangle$ es el mínimo subespacio vectorial de V que contiene a S.
   (ii) $\langle S_1 \cap S_2\rangle \subseteq \langle S_1\rangle \cap \langle S_2\rangle$;
   (iii) $\langle S_1\rangle \cap \langle S_2\rangle \subseteq \langle S_1 \cap S_2\rangle$.
   (iv) Si S_1 es linealmente dependiente y $S_1 \subseteq S_2$, entonces S_2 es linealmente dependiente.
   (v) Si S_2 es linealmente independiente y $S_1 \subseteq S_2$, entonces S_1 es linealmente independiente.
   (vi) Sean $a_1, ..., a_n \in F$ y $x_1, x_2, ..., x_n \in V$. Si $a_1x_1 + a_2x_2 + ...a_nx_n = \overline{0}$ y $x_1, x_2, ..., x_n$ son linealmente independientes, entonces todos los escalares a_i son 0.
8. Sean $W_1 = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \in V : a, b, c \in F\right\}$ y $W_2 = \left\{\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & b \end{pmatrix} \in V : a, b \in F\right\}$ subconjuntos del espacio vectorial $M_{2\times 2}(F)$, con F un campo cualquiera. Demuestre que W_1 y W_2 son subespacios vectoriales de V y encuentre las dimensiones de W_1, W_2, $W_1 + W_2$ y $W_1 \cap W_2$. *Sugerencia:* No se tienen que dar bases para todos estos subespacios.

9. Sean u y v vectores distintos de V. Demuestre que el conjunto $\{u, v\}$ es linealmente independiente si y sólo si el conjunto $\{u+v, u-v\}$ es linealmente independiente.

10. Demuestre que los siguientes subconjuntos de vectores del espacio $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ son linealmente independientes.
    (i) $\{f(t) = e^{rt}, g(t) = e^{st}\}$, donde $r, s \in \mathbb{R}$ y $r \neq s$;
    (ii) $\{f(x) = \sin(x), g(x) = \cos(x)\}$; y
    (iii) $\{f(x) = \cos(nx), g(x) = \cos(mx)\}$, donde $n, m \in \mathbb{N}^+$ y $n \neq m$.

11. Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, dando prueba o contraejemplo.
    (i) Todo espacio vectorial tiene una base finita.
    (ii) Un espacio vectorial no puede tener más de una base.
    (iii) Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Sea S_1 un subconjunto linealmente independiente de vectores de V y sea S_2 un subconjunto de V que lo genera. Entonces S_1 no puede tener más vectores que los que tiene S_2.
    (iv) Sea V un espacio vectorial. Si $\langle S \rangle = V$, entonces cada vector de V se puede escribir de manera única como combinación lineal de vectores en S.
    (v) Si V es un espacio vectorial de dimensión n, entonces V tiene exactamente un subespacio de dimensión 0 y exactamente un subespacio de dimensión n.
    (vi) Sea V un espacio vectorial de dimensión n. Si S es un subconjunto con n vectores de V, entonces S es linealmente independiente si y sólo si $\langle S \rangle = V$.

12. Supóngase que V es un espacio vectorial de dimensión finita y que W_1 es un subespacio de V. Demuestre que existe un subespacio W_2 de V tal que $V = W_1 \oplus W_2$. ¿Es único dicho subespacio W_2? Justifique su respuesta.

13. En Álgebra Lineal I se demuestra que si un espacio vectorial V es generado por un conjunto finito S, entonces existe un subconjunto de S que es base para V. Demuestre la siguiente generalización de este resultado: Sean S_1 y S_2 subconjuntos de un espacio vectorial V tales que $S_1 \subseteq S_2$. Si S_1 es linealmente independiente y $\mathcal{L}(S_2) = V$, entonces existe una base β para V tal que $S_1 \subseteq \beta \subseteq S_2$. *Sugerencia:* Aplique el Lema de Zorn o Principio de Maximalidad a la familia de subconjuntos linealmente independientes de S_2 que contienen a S_1.

14. Recuerde *el espacio cociente de V módulo W* definido en el ejercicio 5 anterior, denotado como V/W. Demuestre lo siguiente.
    a) Sea W un subespacio de un espacio vectorial V de dimensión finita. Sea $\{u_1, u_2, ..., u_k\}$ una base para W. Sea $\{u_1, u_2, ..., u_k, u_{k+1}, ..., u_n\}$ una extensión de la base dada de W a una base de V. Demuestre que $\{u_{k+1} + W, u_{k+2} + W, ..., u_n + W\}$ es una base para el espacio V/W definido en el inciso anterior.
    b) Sea W un subespacio de un espacio vectorial V de dimensión finita. Encuentre una fórmula que relacione $dim(V)$, $dim(W)$ y $dim(V/W)$, justificando su respuesta.

II. Transformaciones lineales y matrices

15. Sean V y W espacios vectoriales sobre el campo F y sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Demuestre que T es lineal si y sólo si $\forall\, c \in F\ \forall\, x, y \in V\ (T(cx + y) = cT(x) + T(y))$.

16. Sean V y W espacios vectoriales cualesquiera. Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, dando *prueba o contraejemplo*:
    (i) Si T es lineal, entonces $T(0_{_V}) = 0_{_W}$.
    (ii) Si T es lineal, entonces T lleva subconjuntos linealmente independientes de V en subconjuntos linealmente independientes de W.
    (iii) Dados $x_1, x_2 \in V$ y $y_1, y_2 \in W$, existe una transformación lineal $U : V \to W$ tal que $U(x_1) = y_1$ y $U(x_2) = y_2$.

17. Sean V y W espacios vectoriales arbitrarios y sea $T_V \to W$ una transformación lineal. Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, dando prueba o contraejemplo.
    (i) Si $T : V \to W$ es lineal, entonces $\{\overline{0}_V\} \subseteq N(T)$.
    (ii) Para cualesquiera $v \in V$ y $w \in W$, existe una transformación lineal $T : V \to W$ tal que $T(v) = w$.
    (iii) Sea $T : V \to W$ lineal. Entonces T es inyectiva si y sólo si $N(T) \subseteq \{\overline{0}_V\}$.
    (iv) Si V y W son de dimensión finita y $T : V \to W$ es lineal e inyectiva, entonces $dim(V) \leq dim(W)$.
    (v) Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita sobre el campo F y sea $T : V \to W$ lineal. Si $dim(V) < dim(W)$, entonces T no puede ser sobre.

(vi) Si $T : V \to W$ es lineal y S es un subconjunto linealmente independiente de V, entonces $T[S] = \{T(x) : x \in S\}$ es un subconjunto linealmente independiente de W.

(vi) T es inyectiva si y sólo si T lleva subconjuntos linealmente independientes de V a subconjuntos linealmente independientes de W;

18. Sea V un espacio vectorial y W un subespacio de V. Defina la función $\eta : V \to V/W$ como $\eta(v) = v + W$ (V/W es el espacio cociente de V módulo W, definido en el ejercicio 5 y revisitado en el ejercicio 14).
    a) Demuestre que η es una transformación lineal, que es sobre y que $N(\eta) = W$.
    b) Si V es de dimensión finita, use el inciso (i) y el Teorema de la Dimensión para encontrar una fórmula que relacione $dim(V)$, $dim(W)$ y $dim(V/W)$.

19. Sean V y W espacios vectoriales sobre un campo F y sean β y γ bases ordenadas para V y W, respectivamente. Sean $T : V \to W$ y $U : V \to W$ transformaciones lineales. Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando con prueba o contraejemplo.
    (i) Si V y W tienen dimensión finita igual y $T : V \to W$ es lineal, entonces existen bases ordenadas β y γ para V y W respectivamente de tal forma que $[T]_\beta^\gamma$ es una matriz diagonal.
    (ii) Si $[T]_\beta^\gamma = [U]_\beta^\gamma$, entonces $T = U$.
    (iii) Si $dim(V) = m$ y $dim(W) = n$, entonces $[T]_\beta^\gamma$ es una matriz de $m \times n$.
    (iv) $[T + U]_\beta^\gamma = [T]_\beta^\gamma + [U]_\beta^\gamma$.
    (v) $\forall\, a \in F [aT]_\beta^\gamma = a[T]_\beta^\gamma$.
    (vi) Si α y β son bases ordenadas para V y W respectivamente, y $T : V \to W$ es una transformación lineal, entonces $\forall\, v \in V\ [T(v)]_\beta = [T]_\alpha^\beta [v]_\alpha$.
    (vii) Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita sobre el campo F con α y β bases ordenadas para V y W, respectivamente. Sea $T : V \to W$ lineal e invertible. Entonces $[T]_\alpha^\beta$ es invertible y $([T]_\alpha^\beta)^{-1} = [T^{-1}]_\alpha^\beta$.

20. (i) Dé la definición explícita de la transformación lineal $T : F^3 \to P_4(F)$ tal que $T(1,0,0) = x^4 + 2$, $T(0,1,0) = x^3 - x$ y $T(0,0,1) = x^2 - 2$.
    (ii) Dé la matriz $[T]_\beta^\gamma$ en términos de la base ordenada canónica β para F^3 y γ la base ordenada canónica para $P_4(F)$.
    (iii) Sea $U : P_4(F) \to F^2$ la transformación lineal definida como $U(a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4) = (a + b + c, d + e)$. Dé las matrices $[U]_\gamma^\alpha$ y $[UT]_\beta^\alpha$, donde $\alpha = \{(1,0),(1,1)\}$.

21. Sea V el espacio vectorial de las sucesiones en $\mathbb{R}$ tales que sólo un número finito de sus entradas son no nulas, es decir, $V = \{\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} |$ el número de n's tales que $a_n \neq 0$ es finito $\}$. Defínanse las funciones $T, U : V \to W$ de la siguiente manera:
    $T(a_1, a_2, a_3, ...) = (a_2, a_3, ...)$; $\qquad U(a_1, a_2, a_3, ...) = (0, a_1, a_2, ...)$.
    T y U se llaman los operadores "shift izquierdo" y "shift derecho" de V, respectivamente.
    (i) Demuestre que T y U son lineales.
    (ii) Demuestre que T es sobre, pero no inyectiva.
    (iii) Demuestre que U es inyectiva, pero no sobre.

22. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea $T : V \to V$ una transformación lineal. Demuestre lo siguiente, teniendo cuidado de decir dónde utiliza la hipótesis de que V es de dimensión finita.
    (i) Si $V = R(T) + N(T)$, entonces $V = R(T) \oplus N(T)$.
    (ii) Si $R(T) \cap N(T) = \{\overline{0}\}$, entonces $V = R(T) \oplus N(T)$.

23. Sean V y T definidos como en el ejercicio 21.
    (i) Demuestre que $V = R(T) + N(T)$, pero que esta suma no es directa, por lo que el resultado del inciso (i) del ejercicio anterior no se puede probar sin asumir que V es de dimensión finita.
    (ii) Encuentre una transformación lineal $T_1 : V \to V$ tal que $R(T_1) \cap N(T_1) = \{\overline{0}\}$, pero tal que V no sea la suma directa de $R(T_1)$ y $N(T_1)$, mostrando que el resultado del inciso (ii) del ejercicio anterior no se puede probar sin asumir que V es de dimensión finita.

24. Sean V y W espacios vectoriales de dimensión n y sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Supóngase que β es una base de V.
    Demuestre que T es un isomorfismo si y sólo si $T[\beta] = \{T(v) : v \in \beta\}$ es una base para W.

25. Sea V un espacio vectorial y sean W_1 y W_2 subespacios de V tales que $V = W_1 \oplus W_2$. Una función $T : V \to V$ se llama la *proyección sobre* W_1 *a lo largo de* W_2 si para $x = x_1 + x_2$ con $x_1 \in W_1$ y $x_2 \in W_2$, se tiene que $T(x) = x_1$.
    (i) Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida como $T(a,b,c) = (a - c, b, 0)$. Demuestre que T es una proyección sobre el plano xy a lo largo de la recta $L = \{(a,0,a) : a \in \mathbb{R}\}$.

(ii) Sea V un espacio vectorial y sean W_1 y W_2 subespacios de V tales que $V = W_1 \oplus W_2$. Sea $T : V \to V$ una proyección sobre W_1 a lo largo de W_2.

(a) Demuestre que T es lineal.
(b) Demuestre que $W_1 = \{x \in V : T(x) = x\}$.
(c) Demuestre que $R(T) = W_1$ y $N(T) = W_2$.
(d) Describa T si $W_1 = V$.
(e) Describa T si $W_1 = \{\overline{0}\}$.

(iii) Sea W un subespacio de un espacio vectorial V de dimensión finita.

(a) Demuestre que existen un subespacio W' de V y una función $T : V \to V$ tales que T es una proyección sobre W a lo largo de W'.

(b) Dé un ejemplo de un espacio vectorial V y un subespacio W de V tales que haya dos proyecciones sobre W a lo largo de dos subespacios (distintos).

26. Sea V un espacio vectorial con dimensión finita y sea $T : V \to V$ una transformación lineal. Demuestre que si rango(T) = rango(T^2), entonces $N(T) \cap R(T) = \{\overline{0}\}$. Deduzca que entonces $V = R(T) \oplus N(T)$.

27. Sea V un espacio vectorial y sea $T : V \to V$ lineal. Decimos que un subespacio W de V es *T-invariante* si $\forall\, x \in W\ (T(x) \in W)$, es decir, $T[W] \subseteq W$. Si W es T-invariante, definimos *la restricción de T en W* como la función $T_W : W \to W$ tal que $\forall\, x \in W (T_W(x) = T(x))$.

(i) Sea $T : V \to V$ lineal. Demuestre que $\{\overline{0}\}$, V, $N(T)$ y $R(T)$ son todos T-invariantes.

(ii) Sea $T : V \to V$ lineal. Si un subespacio W de V es T-invariante, demuestre que T_W es lineal.

(iii) Sea $T : V \to V$ lineal y sea W un subespacio de V. Si T es una proyección sobre W a lo largo de algún subespacio W', demuestre que W es T-invariante y que $T_W = I_W$.

28. Sean A y B matrices de $n \times n$ y 0 la matriz cero de $n \times n$. Demuestre lo siguiente.

(i) Si A y B son invertibles, entonces AB es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(ii) Si A es invertible, entonces A^t es invertible y $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

29. Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, dando prueba o contrajemplo.

(i) Toda matriz de cambio de coordenadas es invertible.

(ii) Sea T un operador lineal definido en un espacio vectorial V de dimensión finita, sean β y β' bases ordenadas para V y sea Q la matriz de cambio de coordenadas que cambia β'-coordenadas en β-coordenadas. Entonces $[T]_\beta = Q[T]_{\beta'}Q^{-1}$.

30. Demuestre que el rango de cualquier matriz $A \in M_{m\times n}(F)$ es la dimensión del subespacio de F^m generado por sus columnas. (Recuerde que si $T : V \to W$ es una transformación lineal y β es una base para V, entonces $R(T) = \langle T[\beta]\rangle$ y recuerde que Ae_j es la j-ésima columna de A.)

31. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida como $T(a, b, c) = (a + b, b - 2c, a + 2c)$. Para cada uno de los vectores $v \in \mathbb{R}^3$ siguientes, determine si $v \in R(T)$. (i) $v = (1, 3, -2)$ (ii) $v = (2, 1, 1)$.

32. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, dé todas sus soluciones y encuentre una base para el conjunto solución del sistema homogéneo correspondiente:

$$\text{(i)}\quad \begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 4x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & - & 8x_2 & + & x_3 & - & 4x_4 & = & 9 \\ -x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & + & 5x_4 & = & -6 \end{array} \qquad \text{(ii)}\quad \begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & 6x_4 & - & 2x_5 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & = & 2 \\ 4x_1 & - & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 7x_4 & - & x_5 & = & 6 \end{array}$$