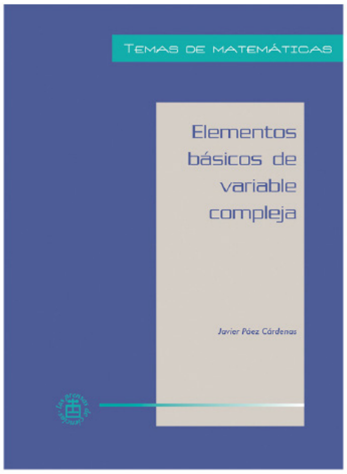

Nota. *Estimados lectores, con gran gusto les compartimos la noticia de la muy reciente aparición del libro*

Elementos básicos de variable compleja

escrito por nuestro estimadísimo colega el profesor Javier Páez Cárdenas, y editado por Las Prensas de Ciencias.
El profe Páez goza de una muy merecida fama de excelente profesor. Sus cursos de cálculo y de variable compleja son destacados platillos en el extenso menú que ofrece el conjunto de profesores (de tiempo completo y de asignatura), de nuestro Departamento de Matemáticas. En el día a día, las discusiones en el salón de clases, las preguntas del profe y de los estudiantes, las distintas tentativas de resolver un problema, la lluvia de ideas, las tareas, los exámenes, y todas las posibles interacciones que se dan entre los asistentes a un curso de variable compleja, todo eso es muy valioso, toda esa experiencia va, en el mejor de los casos, formando un libro. Y cuando ese libro llega a nuestras manos todos nos sentimos muy bien. No lo podemos evitar. Hasta los que vemos este proceso desde lejos nos sentimos orgullosos de la aparición de este texto.
Felicitamos a lo grande a Javier, a sus ayudantes y, principalmente, a sus estudiantes. Les agradecemos profundamente este regalo que hoy nos ofrecen.
A continuación reproducimos la Introducción *y los* Agradecimientos.
Estos dos textos nos dan una pequeña muestra, una probadita, de las cosas extraordinarias que encontraremos en las 340 páginas que siguen.
Agradecemos a las editoras de las Prensas de Ciencias, *el permitirnos reproducir estas primeras páginas del libro.*

Elementos Básicos de Variable Compleja

Javier Páez Cárdenas

Todos (o casi todos) sabemos cómo empezó esta historia. La aparición de la raíz cuadrada de un número negativo al aplicar la fórmula general para la solución de algunas ecuaciones de segundo grado, marca el inicio de una rama muy importante de las matemáticas: *la teoría de funciones de variable compleja*. Y este inicio deja huellas en más de un sentido; tal es el caso del nombre de los números a que da origen: “números imaginarios”. No podía ser de otra forma; estos números no podían “existir”, sólo podían ser “imaginados”.
Este libro tiene el objetivo de servir como libro de texto del curso de *Variable Compleja I* que se imparte en el Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UNAM. Partiendo de este objetivo, se exponen los elementos básicos de la teoría de funciones de variable compleja; desde la construcción de los números complejos, hasta las destacadas propiedades que poseen este tipo de funciones (pasando, claro está, por el importante teorema de Cauchy). En la medida de lo posible, se intenta desarrollar todo este material tomando en cuenta que el lector acaba de concluir con sus cursos de cálculo diferencial e integral en una y varias variables.
Aún cuando el teorema de Cauchy es uno de los resultados más importantes de la variable compleja, el interés principal de este texto se centra en presentar las propiedades de las funciones de variable compleja y mostrar que la mayoría de ellas se pueden probar a partir de una versión muy sencilla de este teorema.

En el **primer capítulo** iniciamos con la construcción de los números complejos, abarcando tanto sus propiedades geométricas como algebraicas. Incluimos su representación esférica, lo que nos permite introducir los complejos extendidos. Definimos el concepto de módulo (o norma) de un número complejo y vemos su relación con la aritmética y geometría de los números complejos. Así mismo, hacemos notar que este concepto coincide con el concepto de norma de un vector en R^2, en virtud de lo cual mencionamos que todos los conceptos y resultados topológicos en el plano complejo, y los correspondientes de convergencia de sucesiones en los números complejos, coinciden con los ya abordados y trabajados en R^2 en cursos anteriores, y que por esta razón se dan por conocidos.

En el **capítulo 2** se abordan los diferentes tipos de funciones entre conjuntos de números, y que serán el principal objeto de estudio de este texto. Se pone especial énfasis en la definición y análisis geométrico de funciones tales como las funciones de Möbius, la función exponencial, las ramas del logaritmo y las funciones trigonométricas. Apoyados nuevamente en la coincidencia del concepto de módulo (o norma) de un número complejo con el de norma de un vector en R^2, damos por conocidos los conceptos de límite y continuidad para este tipo de funciones, así como todos los resultados relacionados con éstos.

En el **capítulo 3** introducimos los conceptos de derivada e integral de funciones de variable compleja. Vemos las propiedades más elementales de estos conceptos y su relación con los correspondientes conceptos de derivada y de integral de línea de funciones de R^2 en R^2, respectivamente. En este capítulo se prueba la primera versión del teorema de Cauchy (sobre una bola abierta o disco en $\boldsymbol{C}$), y las primeras consecuencias importantes de este teorema, como lo es el teorema del módulo máximo.

Los **capítulos 4 y 5** de este texto son sin duda aquellos en los que de manera más clara queda de manifiesto que los temas que ahí se tratan están guiados por la línea de desarrollo seguida por L. Ahlfors(1) en su muy conocido libro(2).

En el **capítulo 4** se estudian fundamentalmente aquellas propiedades de las funciones analíticas que tienen un carácter local (lo que se refleja en el nombre del capítulo). Inicia con el análisis de la existencia de las derivadas de orden superior de este tipo de funciones, con base en lo cual se prueba la fórmula integral de Cauchy para las derivadas y resultados tan importantes como el teorema de Liouville, el teorema de Morera y el teorema fundamental del álgebra. A continuación se introducen las llamadas singularidades aisladas y algunas propiedades que las caracterizan. El estudio de este tipo de singularidades inicia con las singularidades removibles, de cuya caracterización se prueban el lema de Schwarz y el muy importante y útil teorema de Taylor para funciones analíticas. Este teorema permite presentar el primer teorema que relaciona las funciones analíticas con las series de números complejos, lo que a su vez nos lleva a incluir un breve interludio sobre el tema de sucesiones y series de funciones, y en particular sobre las series de potencias. Como un paso previo al análisis de las singularidades aisladas no removibles, se hace un estudio detallado sobre los ceros de una función analítica, lo que permite caracterizar y clasificar al resto de este tipo de singularidades: los polos y las singularidades esenciales. Ya que se cuenta con este material, se formula la primera versión del principio del argumento (para funciones meromorfas en un disco), del que a su vez se desprenden importantes propiedades topológicas, entre las que destacan propiedades sobre la inyectividad e invertibilidad (local) de este tipo de funciones. Este capítulo concluye con la prueba de importantes teoremas como lo son el teorema de Rouché y el teorema de Hurwitz.

En el **capítulo 5**, el último de este texto, se introducen las nociones de ciclo, ciclos homólogos a cero, y ciclos homólogos entre sí, conceptos con base en los cuales se formula y prueba la segunda (y más general) versión del teorema de Cauchy que se da en este trabajo. Una vez que se cuenta con este teorema, se prueban dos importantes resultados: el teorema del desarrollo de Laurent y el teorema del residuo. De este último se desprende la prueba de la segunda versión del principio del argumento que se da en este texto, el correspondiente a funciones meromorfas en regiones arbitrarias. El capítulo concluye con el desarrollo de una de las aplicaciones clásicas del teorema del residuo: el cálculo de integrales.

Agradecimientos
El deseo de escribir este texto surge hace muchos años, no sólo después de impartir el curso de *Variable Compleja I* en la Facultad de Ciencias de la UNAM durante varios semestres, sino después de haber sido sinodal del examen general de conocimientos de la materia de Variable Compleja (que hace algunas décadas se realizaba de manera oral e individual) el cual era obligatorio presentar para obtener el grado de la Maestría en Ciencias (Matemáticas). Por esta razón, las primeras personas a las que deseo expresar mi agradecimiento son todas esas (y todos esos) estudiantes que me eligieron para ser su sinodal de esta materia y con quienes compartí por un periodo de al menos un semestre el "placer" de leer el Ahlfors.
Como suele suceder en la elaboración de una obra como la presente, no sólo está el trabajo del autor, sino también el trabajo de muchas personas más. Una de las tareas más arduas y difíciles en el proceso de publicar un texto como el presente es la lectura y revisión de sus primeras versiones. Por esta razón, agradezco profundamente a mi querida colega, ex-colaboradora y ex-estudiante, Laurita (Rosales Ortiz), quien a pesar de encontrarse realizando su doctorado en el extrajero, tuvo la generosidad de leer la primera versión de este trabajo. Como es de suponerse, sus cuidadosas y rigurosas sugerencias y observaciones enriquecieron enormemente el contenido de este libro.
Quienes también tuvieron un papel muy importante en la revisión y corrección de este trabajo, fueron varios de los estudiantes del curso de *Variable Compleja I* que impartí en la Facultad de Ciencias en el semestre 2023-1. A todos ellos mi más sincero agradecimiento.
Finalmente, expreso mi agradecimiento a los anónimos revisores de este trabajo los cuales fueron designados por la Comisión de Publicaciones del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias. Sus oportunas y atinadas observaciones contribuyeron de manera sustancial a que este libro contenga muchos menos errores. Como es de suponerse, aquellos errores que aún persistan en esta obra son de mi absoluta responsabilidad.

(1) Lars Valerian Ahlfors, (Helsinki, 18 de abril de 1907 -Pittsfield, Massachusetts; 11 de octubre de 1996), fue un matemático finlandés. Ahlfors recibió muchos honores por sus contribuciones a las matemáticas. Fue el primer ganador de la medalla Fields (junto a Jesse Douglas del MIT) además del Premio Wolf en Matemáticas en 1981. (Fuente: Wikipedia).
(2) Ahlfors, Lars V., *Complex Analysis*, Third Edition. McGraw-Hill International Book Company, Tokio, 1979.