Teoría geométrica de ecuaciones diferenciales
Segunda parte

Jessica Jaurez, Laura Ortiz, Jesús Palma y Ernesto Rosales

El libro inicia por un acercamiento a los campos vectoriales en una y varias variables. En una variable, analizamos el modelo exponencial que nos permite hablar tanto del crecimiento de poblaciones que sigue la "ley de Malthus", como del decaimiento radiactivo y de la datación de fósiles por el procedimiento de decaimiento de carbono catorce. Posteriormente, se hace un extenso recorrido por las ecuaciones diferenciales de primer orden lineales homogéneas a fin de obtener su clasificación bajo transformaciones lineales. Más adelante, en el capítulo 5, se introducen las ecuaciones diferenciales de primer orden lineales no homogéneas y se presenta la técnica de variación de parámetros; ésta se utilizará con frecuencia a lo largo del texto. En el mismo capítulo, se muestran las ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes constantes; estas ecuaciones dan pie al análisis de ejemplos clásicos ligados a movimientos vibratorios. El enfoque usado pasa primeramente por hacer una relectura de las ecuaciones lineales de segundo orden vistas como ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, mediante la introducción de una variable que nos permite hacer uso de todo lo desarrollado en los capítulos anteriores. Sin embargo, por su relevancia histórica y sus aplicaciones, se utilizan también los métodos clásicos de sustitución de series; esto se hace para casos muy específicos de ecuaciones con coeficientes variables. Algunas de estas ecuaciones llevan los nombres de aquellos matemáticos y físicos que las trabajaron en su momento en los siglos XVII-XIX.

En el capítulo 6, en el contexto de las ecuaciones lineales con coeficientes constantes, exploramos la clasificación bajo homeomorfismos de las mismas. Para ello, acudimos a la derivada de Lie y a la complejificación vista en el capítulo 4. La clasificación de ecuaciones diferenciales lineales nos deja en condiciones de transitar en el terreno de la clasificación topológica en vecindades de puntos singulares. Este resultado clásico se conoce como teorema de Grobman-Hartman. Asimismo, las técnicas empleadas nos permiten introducir el concepto de estabilidad de Liapunov de puntos singulares.

En el capítulo 7 iniciamos con ecuaciones diferenciales de primer orden no lineales en una variable. Dichas ecuaciones nos permiten hablar de un modelo de crecimiento de poblaciones conocido como ecuación de Verhulst. Hacemos una rápida comparación de éste con el modelo de Malthus que se analizó al principio del libro. En varias variables, la noción de integrabilidad de una ecuación comienza por el análisis de las ecuaciones hamiltonianas. Esta noción nos permite presentar varios ejemplos que permiten dar al lector una idea del crisol de posibilidades que se abren cuando se consideran no sólo los comportamientos locales en vecindades de puntos singulares, sino también su combinación con otros puntos singulares presentes en la ecuación. Las ecuaciones hamiltonianas son, en cierto sentido limitadas, pues pocas veces conseguimos encontrar sus soluciones explícitas, sin embargo, frecuentemente podemos proveer expresiones detalladas, si bien no de sus parametrizaciones, sí del comportamiento de sus curvas de las fases. Estamos entonces en el contexto de dar una partición del espacio por curvas sin importar su parametrización, gracias a que éstas son componentes conexas de curvas de nivel de alguna función diferenciable. Las ecuaciones hamiltonianas son apenas una parte de las ecuaciones conocidas como ecuaciones integrables. Veremos la importancia de considerar ecuaciones que no son hamiltonianas pero que pueden ser transformadas a una que sí lo sea mediante la multiplicación de las mismas por un factor integrante. Hay sutilezas en este proceder que señalamos puntualmente. Las ecuaciones hamil-

Nota. *Estimados lectores, ha sido una sorpresa súper agradable la aparición del libro* Teoría geométrica de ecuaciones diferenciales, *escrito por nuestros queridos colegas Jessica Jaurez, Laura Ortiz, Jesús Palma y Ernesto Rosales.*
Desde las primeras páginas uno se da cuenta del profundo aprecio que los autores sienten por esta importante rama de las matemáticas.
No estamos ante un libro de texto tradicional. No se trata de sólo presentar el material de los cursos de ecuaciones diferenciales ordinarias I y II. Hay mucho más. Observaciones, datos históricos, comentarios bien interesantes y sorprendentes por aquí y por allá. Avanzamos en la lectura de sus páginas y no dejamos de sorprendernos por el cuidado con el que fue escrito.
Jessica, Laura, Jesús y Ernesto nos entregan un fruto maduro, rico en ideas, producto de los muchos semestres que llevan compartiendo con todos nosotros lo que saben, lo que aprenden día a día, lo que descubren en el vasto universo de las ecuaciones diferenciales.
No queda más que agradecerles a los cuatro autores por su trabajo y por el libro que hoy nos regalan. Agradecemos, también, al Instituto de Matemáticas, UNAM, y a los editores de la colección papirhos *por permitirnos reproducir en nuestro Boletín el texto que a continuación compartimos con ustedes. La primera parte se encuentra en el número 766 de este Boletín.*

tonianas en el plano tienen un tratamiento paralelo desde el punto de vista de formas diferenciales. Hacemos una muy breve disgresión al respecto para abrir una pequeña ventana al vasto horizonte de las formas diferenciales.

En el capítulo 8 se abordan teoremas fundamentales de la teoría de ecuaciones diferenciales; a saber, demostraremos los teoremas de existencia y unicidad, así como de diferenciabilidad con respecto a condiciones iniciales. Para este último es necesario introducir la noción de ecuación de primera variación. Retomaremos la noción de ecuación de primera variación en el análisis de la estabilidad de Liapunov de órbitas periódicas. Para la demostración de estos teoremas haremos uso de un teorema de punto fijo (de Banach), que utilizaremos nuevamente en el contexto del teorema de Grobman-Hartman para difeomorfismos. Finalizamos el capítulo con un ejemplo de dinámica discreta, mismo que retomaremos en el contexto de estabilidad estructural y bifurcaciones.

El capítulo 9 está dedicado al estudio de órbitas periódicas. Este estudio nos conduce tanto a la noción sobre la dinámica transversa que proporciona la transformación de Poincaré, como a la teoría de Floquet-Liapunov, a la noción de monodromía y a la teoría sobre estabilidad de Liapunov de órbitas periódicas desarrollada por Andrónov y Vitt. En ese mismo capítulo analizaremos el teorema de Poincaré-Bendixson sobre existencia de ciclos límite. Finalizamos el capítulo con una noción introducida, también por Poincaré, sobre la forma en la que la información local de los puntos singulares puede combinarse en un mismo dominio.

El capítulo 10 es breve en tanto que en él solamente hemos concentrado algunos elementos y resultados sobre las distintas equivalencias que pueden establecerse en la clasificación local de puntos singulares de una ecuación diferencial. Al respecto, en capítulos previos se introdujo la clasificación lineal y topológica de ecuaciones lineales, así como la topológica de ecuaciones no lineales. En este capítulo se hace mención sobre la equivalencia formal, analítica y diferenciable. Estas nociones, que permiten otros matices y sutilezas, serán de utilidad en el capítulo de estabilidad estructural y bifurcaciones.

El último capítulo del libro se dedica a la teoría de estabilidad estructural y bifurcaciones. Primero daremos una serie de ejemplos que nos permitan entender el papel que juegan los conceptos de transversalidad y de intersección tangencial en los problemas de estabilidad. Para este fin, nos apoyamos en la noción de dinámica transversa que se introdujo en el capítulo 10. Posteriormente, presentamos el teorema de Poincaré-Pontriaguin. Este teorema nos da condiciones bajo las cuales puntos singulares de tipo centro, presentes en una ecuación hamiltoniana, producen, bajo perturbación, la aparición de ciclos límite. Más adelante, damos la noción de “policiclo” y enunciamos el teorema de Andronov-Leontovich, relativo a la estabilidad de Liapunov de ciclos límite que pueden surgir de la perturbación de una órbita *homoclínica* (un policiclo con un sólo vértice). Posteriormente presentamos la noción de *robustez* de una ecuación diferencial introducida por A. Andrónov y L. Pontriaguin en 1937. Este concepto viene de la palabra rusa “грубо”, la traducción literal de la misma sería *tosco, rudo*, sin embargo, consideramos que la palabra *robusto* refleja de mejor manera la noción que se pretende transmitir. La definición de robustez de una ecuación diferencial es equivalente, en conjuntos compactos en el plano, a la noción de *estabilidad estructural* introducida por M. Pexioto en 1952. Esta equivalencia fue demostrada por el mismo Peixoto. El concepto de estabilidad estructural en ecuaciones diferenciales ha sido, desde entonces, ampliamente usado en la literatura. Finalizamos el capítulo con un paseo somero a policiclos con varios puntos singulares y el natural surgimiento del uso de *series de Dulac*, que son un caso especial de f*unciones generalizadas*. Dichos policiclos son una pieza clave en el estudio del *problema 16 de Hilbert*. Por la extensión de la literatura relativa a dicho problema, nos restringimos sólo a hacer algunos comentarios sobre los avances que han surgido al respecto en los últimos años.

Agradecemos profundamente a los árbitros por sus atinadas sugerencias y comentarios. Asimismo, manifestamos nuestra inmensa gratitud a la Facultad de Ciencias y al Instituto de Matemáticas de la UNAM, quienes nos abrieron generosamente, y de distintas formas, sus espacios, permitiendo nuestra formación y desarrollo como matemáticos y seres humanos.
A la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) nuestra gratitud y compromiso sin límite por haber sido y seguir siendo la casa que genera y cobija sueños, que abre franca sus puertas, que permea en su gente y se empapa de ella, que se nutre y nos nutre de la diversidad y el entendimiento mutuo.