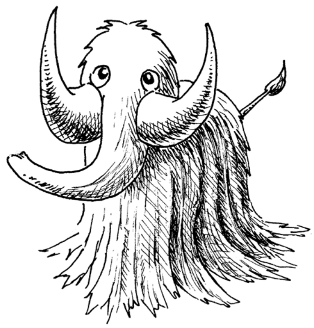

Nota. *Estimados lectores, recientemente, en el pasado mes de junio, antes de las vacaciones de verano, nos enteramos de la aparición de un nuevo libro de ecuaciones diferenciales. La noticia nos dio un gusto enorme. El título es* Teoría Geométrica de Ecuaciones Diferenciales*. Los autores son nuestros muy queridos colegas Jessica Jaurez, Laura Ortiz, Jesús Palma y Ernesto Rosales. Fue editado por el Instituto de Matemáticas, UNAM, y es parte de la colección* papirhos*.*
Las ecuaciones diferenciales forman uno de los territorios de las matemáticas más atractivos. No es exagerado decir que todos los que hemos pasado por los cursos de Ecuaciones Diferenciales I y II hemos experimentado, en muchos momentos, fascinación por la riqueza de ideas que ahí se expresan.
Por otro lado, queremos destacar los cursos de ecuaciones diferenciales que, ya por una buena cantidad de años, han ofrecido Laura y Ernesto en nuestra facultad. De verdad, sus clases son extraordinarias.
En la contraportada del libro leemos lo siguiente:

En este texto hemos optado por seguir el enfoque de las ecuaciones diferenciales que privilegia la comprensión geométrica de las mismas. Cierto es que las opciones para ello son tan vastas que los gustos y experiencias personales han entrado en juego al elegir los temas tratados.De igual manera, se ha puesto acento en la presentación de múltiples ejemplos como fundamento principal en la construcción del razonamiento.

Felicitamos a Jessica, Laura, Jesús y Ernesto. El texto que hoy ponen en nuestras manos constituye, sin duda, un evento muy significativo. Es, entre otras cosas, una invitación a una fiesta llena de ideas y de sorpresas. Reproducimos a continuación parte del prefacio del libro. Agradecemos profundamente a los responsables de la colección papirhos*, y al Instituto de Matemáticas, el permitirnos reproducir en el Boletín este trabajo.*

Teoría geométrica de ecuaciones diferenciales
Primera parte

Jessica Jaurez, Laura Ortiz, Jesús Palma y Ernesto Rosales

El nacimiento de las ecuaciones diferenciales se atribuye esencialmente a los trabajos de I. Newton (1642-1727) y de G. Leibniz (1646-1716). Es muy probable que éstos hayan sido inspirados por problemas de tipo geométrico relativos a la construcción de curvas en el plano, partiendo de información de rectas que se asumen como tangentes a la curva que se desea construir (René Descartes (1596-1650)). Las ideas desarrolladas tanto por Newton como por Leibniz detonaron una intensa labor de matemáticos de los siglos XVII, XVIII y XIX, entre los que se encontraban J. Bernoulli (1667-1748), D. Bernoulli (1700-1782), J.P. Riccati (1676-1754), A.C. Clairaut (1713-1765), J.L.R. D'Alembert (1717-1783), L. Euler (1707-1783), P-S. Laplace (1749-1827), J.L. Lagrange (1736-1813), A.M. Legendre (1752-1833), C.F. Gauss (1777-1855), P. Chebyshev (1821-1894), Ch. Hermite (1822-1901) y E. Laguerre (1834-1886), entre otros. La labor de éstos en relación con las ecuaciones diferenciales se centró en hallar caminos para resolverlas explícitamente. Este trabajo hizo uso de series de potencias así como de métodos, muchas veces desarrollados con agudeza, para llegar a los resultados deseados. Algunas veces los intercambios epistolares entre los matemáticos, físicos e ingenieros fueron muy intensos; algunos de ellos derivaron en contribuciones positivas, otras en desafortunados desencuentros. Sin embargo, a pesar de su intensidad y trascendencia, esta labor fue en cierto sentido limitada, en tanto que se trataba de la resolución de ecuaciones muy particulares, no por ello de menor interés, que se ligaban con frecuencia a un problema físico específico.

El trabajo de J. Liouville (1809-1882), quien realizó grandes esfuerzos intentando generar un tratado de clasificación y solución de ecuaciones diferenciales, fue un verdadero parteaguas, pues su labor derivó en un inesperado resultado que motivó cambios radicales en el modo de entender las ecuaciones diferenciales. A saber, Liouville demostró la existencia de ecuaciones que no podían ser resueltas por funciones elementales (un ejemplo sencillo de ello es la ecuación $dx/dt= x^2 + t^2$). A raíz de este descubrimiento, se hizo necesaria una perspectiva distinta, un aire nuevo que diese al tratamiento de las ecuaciones diferenciales un enfoque radicalmente diferente. Este enfoque se hizo presente con la intervención de Henri Poincaré (1854-1912). En *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle*, 1881, Poincaré plantea la relevancia de analizar las ecuaciones diferenciales por sí mismas, más que enfocarse en encontrar soluciones explícitas de ellas. Es así que, en múltiples trabajos, Poincaré se manifiesta por cambiar la visión centrada en encontrar soluciones explícitas de ecuaciones diferenciales a una visión cualitativa en la que se conjuguen tanto el análisis local de la ecuación diferencial como el global; a ese fin, recurre tanto al análisis complejo local, muy desarrollado en esa época a partir de los trabajos de A.L. Cauchy (1789-1857), B. Riemann (1826-1866), K. Weierstrass (1815-1897), C.G. Jacobi (1804-1851), L. Fuchs (1833-1902), como al análisis real local y global. Cabe señalar que el trabajo realizado por L. Fuchs sobre ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes variables se considera un puente entre la matemática previa a éste y la desarrollada posteriormente por Poincaré. En el caso del análisis real local y global, la atención de Poincaré se centra en dar una clasificación local de puntos singulares para después articularlos, desde un punto de vista integral, con comportamientos en el plano y en superficies distintas. Todas estas iniciativas contribuyeron al amplio desarrollo de la topología y a la conjunción de ésta con otras ramas de las matemáticas: teoría de los grupos, geometría algebraica, análisis real y complejo, o geometría diferencial, entre otros.

"... D'ailleurs, cette étude qualitative aura par elle-même un intérêt du premier ordre. Diverses questions fort importantes d'Analyse et de Mécanique peuvent en effet s'y ramener. Prenons, par exemple, le problème des trois corps: ne peut-on pas se demander si l'un des corps restera toujours dans une certaine région du ciel ou bien s'il pourra s'éloigner indéfiniment; si la distance de deux corps augmentera, ou diminuera à l'infini, ou bien si elle restera comprise entre certaines limites? Ne peut-on pas se poser mille questions de ce genre, qui seront toutes résolues quand on saura construire qualitativement les trajectoires des trois corps? Et, si l'on considère un nombre plus grand de corps, qu'est-ce que la question de l'invariabilité des éléments des planètes, sinon une véritable question de géométrie qualitative, puisque, faire voir que le grand axe n'a pas de variations séculaires, c'est montrer qu'il oscille constamment entre certaines limites."

"Tel est le vaste champ de découvertes qui s'ouvre devant les géomètres..."

(...*Además, este estudio cualitativo será en sí mismo de gran interés. De hecho, se pueden volver a abordar varias cuestiones muy importantes de análisis y mecánica. Consideremos, por ejemplo, el problema de los tres cuerpos: ¿no podemos preguntarnos si uno de los cuerpos permanecerá siempre en una determinada región del cielo o si podrá alejarse indefinidamente; si la distancia entre dos cuerpos aumentará o disminuirá ad infinitum, o si permanecerá dentro de ciertos límites? ¿No podemos hacernos mil preguntas de este tipo, que se resolverán todas cuando sepamos construir cualitativamente las trayectorias de los tres cuerpos? Y, si consideramos un mayor número de cuerpos, ¿cuál es la pregunta sobre la invariabilidad de los elementos de los planetas, sino una pregunta real de geometría cualitativa, ya que, hacer notar que el eje mayor no tiene variaciones seculares, es mostrar que oscila constantemente entre ciertos límites. Tal es el vasto campo de descubrimientos que se abre ante los geómetras...*)

Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle, 1881, M, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, (2) 7 (1881), p. 376.

Este desarrollo, introducido por H. Poincaré, fue seguido por otros matemáticos franceses de la época, tales como Gaston Darboux (1842-1917), Paul Painlevé (1863-1933) y Henri Dulac (1870-1955). En otras latitudes, sus trabajos también fueron estudiados y su perspectiva secundada. Tal es el caso de la escuela rusa, destacando en ésta A. Liapunov (1857-1918), A.N. Kolmogorov (1903-1987), L. Pontriaguin (1908-1988) , A. Andrónov (1901-1952), E.A. Leontovich (1905-1997) , A.A. Vitt (1902-1937), S.E. Khaikin (1901-1968) y N.N. Bautin (1908-1993), entre otros. Cabe también destacar la labor del matemático estadounidense G.D. Birkhoff (1884-1944) quien, entre otras cosas, trabajó en un caso particular del problema de los tres cuerpos que había sido iniciado en buena medida por Poincaré antes de su fallecimiento; este problema, conocido ahora como "Último Teorema Geométrico de Poincaré" fue demostrado en su totalidad por Birkhoff. Posteriormente, hubo un amplio desarrollo del enfoque cualitativo introducido por Poincaré, que al paso del tiempo ha tenido una considerable expansión en distintos lugares y ha propiciado la confluencia de ramas diversas de las matemáticas.

En este texto hemos optado por seguir el enfoque de las ecuaciones diferenciales que privilegia la comprensión geométrica de las mismas. Cierto es que las opciones para ello son tan vastas que los gustos y experiencias personales han entrado en juego al elegir los temas tratados. En particular, el enfoque seguido por V.I. Arnold en su libro *Ordinary Differential Equations* ha sido sustancial en la decisión y tratamiento de algunos de los temas elegidos. Un primer acercamiento que dio lugar a la elaboración de este libro es el texto [1]. Algunos extractos de éste han sido retomados por los autores.

Continuará.

[1] *La historia de un empujón un vistazo a las ecuaciones y los sistemas dinámicos*, Laura Ortiz y Ernesto Rosales. México: papirhos, IM-UNAM, 2011.