La comprensión matemática

Nota. *Estimados lectores el miércoles 8 de septiembre pasado se realizó la presentación del libro*

La comprensión matemática

escrito por Carlos Álvarez, Begoña Fernández, Anabel Jáuregui-Hernández y Carmen Martínez-Adame, y editado por Las Prensas de Ciencias.
En el cuarto capítulo, escrito por la profesora Carmen Martínez-Adame, en la página 141, leemos lo siguiente:

La comprensión en matemáticas es un tema que ha sido estudiado desde diversas perspectivas, sin embargo, nuestro objetivo aquí es estudiar de qué maneras se comprende en matemáticas desde el interior de la disciplina misma.
Una pregunta que resulta de suma importancia es la de cómo y cuándo un objeto se vuelve un objeto matemático. El abordar esta pregunta permite analizar los orígenes y el contexto en el que las diferentes ramas de las matemáticas nacen o crecen y es interesante preguntarse si esto ocurre de la misma manera dentro de cada una. El punto que más nos interesa estudiar aquí es el papel que juegan los objetos patológicos, es decir, los objetos que se comportan de manera inesperada...

Reproducimos a continuación el prefacio del texto. Agradecemos a Las Prensas de Ciencias el permitirnos compartir con ustedes este trabajo.

Prefacio

Para Santiago

Carmen Martínez-Adame

Este libro es el resultado de varios años de trabajo, una robusta colaboración entre colegas y un proyecto de historia y filosofía de las matemáticas que pretende contribuir a la reflexión sobre la comprensión en matemáticas y, en particular, mostrar algunos usos de lo que podríamos llamar "comprensión matemática".

La comprensión en matemáticas es un tema que ha sido abordado en su mayoría desde dos perspectivas distintas: ya sea como un problema que pretende mejorar el desempeño de los alumnos, esto es, como parte de la matemática educativa; o bien, desde el punto de vista de las ciencias cognitivas, es decir, ¿cómo es posible el aprendizaje matemático en el ser humano?

Nuestra propuesta es estudiar la comprensión matemática desde la práctica matemática. Para entender este último término, podríamos partir de la noción introducida por Philip Kitcher en 1984([1]) en la que, para dar cuenta del crecimiento histórico y desarrollo de las matemáticas, sugiere enfocarse en lo que él llama "práctica matemática" y define a partir de cinco componentes: un lenguaje, un conjunto de enunciados aceptados, un conjunto de razonamientos aceptados, un conjunto de preguntas seleccionadas como importantes y un conjunto de perspectivas meta-matemáticas.

La introducción de este concepto trajo consigo cambios importantes dentro de algunas líneas de investigación de la filosofía de las matemáticas en las cuales se propuso, que para enfocarse en la práctica matemática, era necesario analizar tanto la historia como la práctica de matemáticos en activo para luego tornar esta historia y práctica filosóficamente relevantes.

En estos términos, nuestra propuesta es novedosa y consideramos que no necesita de una posición filosófica o analítica explícita y presentada a priori, pues nuestra finalidad es partir del desarrollo histórico de las matemáticas y así el alcance de esta obra se determinará al contestar las siguientes preguntas que son las que guían nuestra reflexión: ¿en qué contextos se puede hablar de una comprensión matemática? ¿hay diferentes maneras de comprender un mismo tema? ¿tiene sentido hablar de criterios que nos permitan identificar diferentes actos de comprensión? Si la respuesta a esta última pregunta es afirmativa, ¿qué criterios se pueden utilizar?

Para presentar una respuesta, si bien parcial, a estas preguntas, nos hemos enfocado en dos temas centrales: el papel de los teoremas fundamentales en el fundamento de las matemáticas y el papel de los objetos patológicos en el surgimiento y desarrollo de objetos y teorías matemáticas. Vale la pena aclarar que el término "patológico" se utiliza en matemáticas de manera no formal para referirse a objetos que han sido concebidos específicamente para incumplir ciertas propiedades consideradas como casi universalmente válidas. Estos objetos a menudo proporcionan ejemplos interesantes de un comportamiento contrario a la intuición y por ello su estudio resulta particularmente interesante para nosotros.

([1]) Kitcher, P., *The Nature of Mathematical Knowledge*, Oxford University Press, 1984.

Estos temas resultan novedosos desde su planteamiento, puesto que sólo se pueden estudiar llevando a cabo un análisis e investigación de las fuentes primarias, es decir, de la obra matemática en sí. En la primera vertiente que se ha estudiado, los teoremas fundamentales, nuestra hipótesis es que en ellos se encuentra una nueva fuente para abordar el clásico problema relacionado con el fundamento de las matemáticas, dejando así de lado las respuestas bien conocidas que aseguran que dicho fundamento se encuentra, por ejemplo, en una teoría de conjuntos axiomatizada que en ocasiones es completamente ajena al objeto de estudio. Esta hipótesis se estudia a fondo en el caso de la geometría y la probabilidad y permitirá entender en qué sentido se puede decir que ciertas proposiciones *fundamentan* una teoría y, por tanto, cómo opera al interior de la práctica matemática la comprensión. Esto sienta la pauta para preguntarnos también si la comprensión matemática es la misma al interior de todas las ramas de las matemáticas o si adquiere significados particulares dentro de cada una de ellas. Esto se puede ver claramente al comparar esta primera con la segunda vertiente propuesta, es decir, el estudio de objetos patológicos que han sido estudiados dentro del análisis matemático de los siglos XIX y XX. Al comprender qué papel juegan estos objetos y poder confirmar nuestra hipótesis de que es gracias a ellos que se entiende el verdadero concepto estudiado, podemos comparar la noción de comprensión en la geometría, la probabilidad y el análisis matemático.

La relación que existe en matemáticas entre los llamados teoremas fundamentales y los fundamentos de las matemáticas no ha sido estudiada a fondo por la filosofía de las matemáticas y es una relación que nos interesa analizar a profundidad. En una de las ramas que nos interesa en particular estudiar, la geometría, y en una lectura del texto clásico, *Elementos* de Euclides, se puede comprender que hay básicamente dos teorías para la geometría plana, no contradictorias pero claramente distintas, a saber, la que se basa en la congruencia de las figuras y la que da cuenta de la semejanza entre ellas. La teoría basada en la congruencia de figuras descansa sobre los tres teoremas de congruencia de triángulos antes de apoyarse en el quinto postulado euclidiano para dar cuenta de la congruencia de figuras paralelográmicas. La teoría que da cuenta de la semejanza de figuras se apoya fundamentalmente en el teorema de Thales, el cual depende a su vez del quinto postulado. Sin embargo, cuando David Hilbert se pregunta por el fundamento de la geometría euclidiana, el panorama cambia de manera drástica. El texto de Anabel Jáuregui pone de manifiesto que lo que Hilbert muestra en los *Fundamentos de la geometría* es que la geometría euclidiana emana de los teoremas de Pappus y Desargues. Esto no significa que hubiese un error en la base euclidiana, más bien, muestra que existe otra fundamentación para esta geometría, fundamentación que hace posible otra manera de *comprenderla*.

En este contexto se establece una comparación entre la geometría plana de Euclides y la geometría plana que se reconstruye en la obra de Hilbert y se señala un doble contraste. En la geometría de Euclides se presentan y prueban una serie de teoremas que forman parte de la teoría de la congruencia y que sostienen al edificio de la geometría; y el artículo de Carlos Alvarez en este volumen está dedicado a señalar un contraste con la geometría del círculo estableciendo las limitantes que la axiomática hilbertiana tiene al respecto. La hipótesis central presentada es que, dadas estas limitantes, se puede concluir que no parece haber estado en el horizonte de Hilbert el que su geometría diera cuenta de la geometría del círculo.

Como se ha mencionado ya, esta manera de entender los fundamentos de una teoría es distinta a la clásica, que toma como fundamento de una teoría a sus axiomas. Desde este punto de vista vale la pena retomar lo que el propio Hilbert dijo en 1900 ante el Congreso Mundial:

"Das Endziel" so hat Weierstrass einmal gesagt, "welches man stets im Auge behalten muß, besteht darin, daß man über die Fundamente der Wissenschaft ein sicheres Urteil zu erlangen suche" ... "Um überhaupt in die Wissenschaften einzudringen, ist freilich die Bescha äftigung mit einzelnen Problemen unerl äßlich." In der That bedarf es zur erfolgreichen Behandlung der Grundlagen einer Wissenschaft des eindringenden Verst ändnisses ihrer speziellen Theorien ; nur der Baumeister ist im Stande, die Fundamente für ein Gebäude sicher anzulegen, der die Bestimmung des Gebäudes selbst im Einzelnen gründlich kennt. (2)

Esto lo dijo inmediatamente después de presentar el sexto de sus problemas que consistía en proponer axiomas con base matemática para la física, dentro de la cual contemplaba en particular a la probabilidad y la mecánica. La manera clásica de entender este problema es que Kolmogorov dio su solución en 1933 con la publicación de su *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, sin embargo, en este volumen Begoña Fernández nos invita a buscar el fundamento de la probabilidad en sus teoremas centrales y no en su axiomática. Sostiene que es a través de estos resultados que se logra una comprensión plena de la teoría y que, por tanto, el fundamento de la misma debe basarse sobre ellos.

En el cuarto capítulo se presenta un acercamiento al problema de la comprensión en matemáticas a través de los objetos patológicos; puesto que éstos adquieren, como ya mencionamos, su nombre al tener un comportamiento atípico o contraintuitivo tienen la capacidad de revelar

(2) Hilbert, *D.* Mathematische Probleme, *Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-Physikalische Klasse*", Heft 3, 253–297, 1900. ["El objetivo final", como dijo una vez Weierstrass, "que siempre hay que tener en cuenta, es que se busca obtener un correcto entendimiento de los fundamentos de la ciencia" ... "Pero para lograr cualquier avance en las ciencias el estudio de problemas particulares es por supuesto indispensable." De hecho, el tratamiento exitoso de los fundamentos de la ciencia requiere de una comprensión plena de sus teorías particulares; solo el arquitecto que conoce los detalles del edificio a profundidad es capaz de sentar sólidas bases.]

mucho sobre cómo se comprenden diferentes conceptos. En particular, se estudia cómo las funciones patológicas permitieron el desarrollo del concepto de función y cómo es a raíz de este mismo trabajo que se concluye que estas funciones en realidad no cumplen las características necesarias para ser llamadas contraejemplos.

Para concluir este breve prefacio, me gustaría agradecer a dos árbitros anónimos cuyos comentarios ayudaron a mejorar este texto así como a Rafael Reyes por su invaluable apoyo técnico para darle a este libro su formato. No me queda finalmente sino reconocer con gratitud a las personas que me enseñaron a comprender las matemáticas: Carlos Álvarez, Ángel Carrillo, E. Brian Davies.

Boletín de Matemáticas

Esta es nuestra página

https://lya.fciencias.unam.mx/boletin/

Si deseas suscribirte al Boletín y recibir el lunes de cada semana del semestre el número correspondiente por favor envía un correo a la dirección:

boletin-matem@ciencias.unam.mx

Y con gusto te agregamos a nuestra lista.

XVI Taller de continuos, hiperespacios y sistemas dinámicos

Del 9 al 12 de noviembre de 2021.

En este taller pretendemos alentar a los estudiantes en sus estudios de topología, y motivarlos para realizar investigación en teoría de continuos, hiperespacios, dinámica topológica y temas afines.
El taller se llevará a cabo del 9 al 12 de noviembre de 2021 vía remota utilizando la plataforma Zoom.
Las actividades están programadas en las tardes comenzando a las 16:00 horas
En esta ocasión el doctor Benjamin Vejnar, investigador en el Departamento de Matemáticas y Física de la Charles University, Praga, República Checa, impartirá un minicurso *Descriptive set theoretical properties of continua*.
El doctor Hugo Villanueva Méndez, investigador de la Universidad de las Américas en Puebla, ofrecerá el minicurso *Topología en hiperespacios de conjuntos particulares*.
Todos los participantes del taller se tienen que registrar, ya sea que vayan a impartir plática o no. Solamente las personas que se hayan registrado podrán ser admitidas en la sala virtual de zoom.

Para mayor información visiten el sitio web del evento:

https://sites.google.com/ciencias.unam.mx/xvi-taller-de-continuos/home
Esperamos contar con su asistencia.

Atentamente,

Comité Organizador:
Alicia Santiago Santos (UTM)
Yaziel Pacheco Juárez (UJED)
David Maya Escudero (UAEM)
Leobardo Fernández Román (ITAM, UNAM)
Raúl Escobedo Conde (BUAP)

Seminario DiferenciaHable

Medio diferenciable: el cálculo fraccionario y sus aplicaciones

Dr. Pablo Padilla Longoria
IIMAS, UNAM

Jueves 14 de Octubre de 2021, de 12:00 a 13:00 horas

Plataforma Webex

https://www.webex.com/es/video-conferencing.html

Número de reunión: 2624 692 1947
Contraseña del evento: VEdrg6beR24

60 Aniversario Cinvestav

Sesión temática de Topología

En el marco del 60 aniversario de su creación, el Departamento de Matemáticas del Cinvestav invita a la comunidad científica a asistir a la Sesión Temática de Topología, que se llevará a cabo los lunes y viernes, a las 10 am, de acuerdo al siguiente calendario:

Alejandro Adem
(University of British Columbia)
Lunes 11 de octubre

Rita Jiménez Rolland
(Instituto de Matemáticas, UNAM)
Viernes 15 de octubre

Los enlaces para las pláticas serán anunciados en:

https://www.math.cinvestav.mx/mate60/topologia